

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 20 日現在

機関番号：14401
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2010～2012
 課題番号：22540125
 研究課題名（和文） 非有界領域の反射壁マルコフ過程の拡張
 研究課題名（英文） Extensions of reflecting Markov processes on unbounded domains
 研究代表者
 福島 正俊（FUKUSHIMA MASATOSHI）
 大阪大学・その他部局等・名誉教授
 研究者番号：90015503

研究成果の概要（和文）：

- (1) 2 個の無限錐からなる 3 次元閉領域上の反射壁ブラウン運動の時間変更過程が対称マルコフ過程に拡張される仕方は 4 種類あり、それに限ることを示した。
- (2) 平面上の多重連結領域の等角写像族に関する小松・レブナー方程式を「かがりブラウン運動」(BMD) を用いて、常微分方程式として初めて完全に導出することに成功した。
またそれに基づいて、統計物理の確率モデルに関連する stochastic Loewner evolution の概念を stochastic Komatu-Loewner evolution として単連結領域から多重連結領域に拡張することにも成功した。
- (3) 1 次元開区間上の極小拡散過程が標準測度に関して対称であることを示し、その可能な対称拡散拡張を決定し、伊藤・マッキーンの理論と対応させた。その結果、一般境界条件を満たす 1 次元拡散過程は正則ディリクレ形式によって直接的に構成可能なことが明らかになった。

研究成果の概要（英文）：

1. The time changed reflecting Brownian motion on a 3-space consisting of two infinite cones is shown to admit 4 and only 4 possible symmetric Markovian extensions.
2. The Komatu-Loewner differential equation for a multiply connected planar domain is derived by the Brownian motion with darning (BMD). The notion of stochastic Loewner evolution (SLE) for simply connected domains is extended to multiply connected domains as stochastic Komatu-Loewner evolution (SKLE).
3. The minimal diffusion on an interval is shown to be symmetric for the canonical measure and all its symmetric diffusion extensions are identified in relation to Ito-McKean's theory. As a result, the one-dimensional diffusions with general boundary conditions can be directly constructed by means of regular Dirichlet forms.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	300,000	90,000	390,000
年度			
年度			
総計	1,300,000	390,000	1,690,000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：無限錐、反射壁ブラウン運動、多重連結領域、小松・レブナー微分方程式、かがりブラウン運動、SKLE, 1次元極小拡散過程、対称性、対称拡散拡張

1. 研究開始当初の背景

マルコフ過程の境界問題は、1957年に Feller が1次元拡散過程の最も一般的な境界条件を特定した直後に、マルコフ連鎖に対し、境界が有限個の場合に提示したのに始まる。しかし、与えられたマルコフ過程 X が対称であり、境界が有限個である場合に限定しても、 X の可能な対称拡張の全体を特徴づけてつ、その解析的、確率論的構成がはじめて系統的に行われたのは、2007-2009年度の本研究代表者による基盤研究(C)「マルコフ過程の境界問題と点過程」に於いてであった。この研究で特に確率論的構成のために採用した伊藤清による境界の周りでの excursion の値を取るポアソン点過程の方法により、境界が通常の意味での有限集合である場合に限らず、互いに交わらないいくつかの集合をそれぞれ1点とみなして得られる有限集合の場合にも適用可能であることが発見された。これは境界問題として扱われるマルコフ過程の範囲を著しく拡大するものであり、その具体化が待たれた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、 X が1次元、2次元、3次元ユークリッド空間の特別な領域上の吸収壁拡散過程、吸収壁ブラウン運動、反射壁拡散過程である場合にそれぞれ、前研究で確立された一般論を具体的に応用し、それによって新たな知見を獲得することにある。

特に3次元の場合には、反射壁ブラウン運動の無限遠方への拡張という確率論問題意識に基づいて、古典的な BL 関数族の新たな解析学的構造の解明を目指す。

2次元の場合には多重連結領域上で各穴を1点とみなしつつ反射させて得られる「かがりブラウン運動」を用いる確率論的な方法が、多重連結領域の複素解析学を発展させるのみならず、最近数理物理学に関係して盛んに研究されている SLE 理論の拡張発展のためにも、有効で不可欠であることを明らかにする。

1次元の場合には、フェラー・伊藤・マッキーの一般境界条件の中で、対称拡散拡張に対応するものが主要な位置を占めることを

明らかにする。またこれによって、一般境界条件を満たす1次元拡散過程が、対応する正則ディリクレ形式によって直接的に構成されることも明らかにする。

3. 研究の方法

対称マルコフ過程を特徴づけるディリクレ形式論の最新の結果をまとめた Z.-Q. Chen 教授との共著の図書①の諸結果を用いるのが方法の重要な鍵の一つである。

「研究成果の概要」の3項に従って記す。

(1) に関しては、反射壁ブラウン運動の反射ディリクレ空間の一般元である BL 関数で、拡大ソボレフ空間に直交するもの全体のなす空間の次元が2に等しいことを示す。

(2) に関しては、多重連結領域の各穴の上で q.e. に定数に等しいものなすソボレフ空間の部分空間は、各穴を1点とみなして得られる位相空間上の正則、局所的ディリクレ形式となることが用いられる。そのような位相空間上に対応する拡散過程が「かがりブラウン運動」(Brownian motion with darning, BMD) に他ならない。しかしこの問題の性格上、用いるべき方法としては、単にディリクレ形式論にとどまらず、複素関数論、偏微分方程式論、確率微分方程式論、そして常微分方程式論のそれぞれの基本的部分の組み合わせが必要となった。

(3) に関しては、標準測度に関して自乗可積分な関数族上のディリクレ形式を用いて得られる境界条件が、再生核を通じて、伊藤・マッキーの一般境界条件にうまく翻訳されることが用いられる。後者は従来、有界連続関数族上の生成作用素に基づいて定式化されていた。

4. 研究成果

(1) 2個の無限錐からなる3次元閉領域上の反射壁ブラウン運動を時間変更して有限時間で無限遠に近づくようにしたもの X を考える。上述のような BL 関数の次元が2であることは、遠方の境界が本質的に2個 a, b からなることに対応する。そして X の対称な拡張は a, b で反射させるもの、 a, b を同一視して反射させるもの、 a で反射させ、 b

で吸収させるもの、 b で反射させ、 a で吸収させるもの、の4種類あり、それらに限ることが示された。この問題は代表者の論文④で提示され、上述の結果は Z.-Q. Chen 教授との共著本①の7.7節に載せられた。

(2) 上半平面から x 軸に平行で互い交わらない有限個の線分 (スリット) を除いて得られる標準スリット領域上の単純曲線の導く等角写像族に関する小松・レブナー微分方程式をかがりブラウン運動を用いて確率論的に導出した。そしてこの方程式の右辺には、かがりブラウン運動の複素ポアソン核が現れることを明らかにした。

この方程式はスリットがない場合に複素関数論で古くから知られていたレブナー方程式の一般化であるが、1950年の小松勇作による最初の論文においても、それを改良した最近の Bauer-Friedrich 論文においても、等角写像族のパラメータに関する右微分可能性が示されていなかった。

本研究では等角写像関数の虚部を、かがりブラウン運動による平均量として表示することにより、方程式に関連する基本的な諸量のパラメータに関する連続性を導き、それとは別に偏微分方程式の内部変動法を用いて証明されるかがりブラウン運動の複素ポアソン核のリプシッツ連続性と組み合わせることによって、等角写像族の微分可能性が証明され、小松・レブナー方程式を常微分方程式として初めて確立することに成功した。

上述の研究は米国シアトルのワシントン大の Z.-Q. Chen, S. Rhode 2教授との共同で行われ、その成果の一部は国際学会②で発表され、共著論文を研究雑誌に投稿中である。

Oded Schramm は 2000年に、等角不変で領域マルコフ性を満たすランダムなジョルダン曲線に対しては、レブナー方程式を介して、上半平面の境界である x -軸上のブラウン運動の定数倍が対応することを見出した。そして逆に後者を与えるとレブナー方程式に代入して解くことにより、必ずしも単純でないランダム曲線が得られることを見出し、これを stochastic Loewner evolution (SLE) の名付けた。SLEの研究はその後パーコレーション等の統計物理学の確率モデルと関連づけられ、著しく発展している。

本研究の対象である多重連結な標準スリット領域では、上述のようなランダムなジョルダン曲線に対しては、 x -軸上の運動のみでなく、それとスリットの運動の結合過程が、特別な斉次係数を持つ確率微分方程式の解として対応することが、また逆に後者を与え小松・レブナー方程式に代入して解くことによって得られる stochastic Komatu-Loewner evolution (SKLE) の概念を定式化することが可能であることが代表者の研究で明らか

にされ、国際学会①でその一部が発表されている。これらの成果は上述の Chen, Rohde 教授との共同研究の結果に基づいて導出されたものである。

このように SKLE は単連結領域の SLE を多重連結領域に自然に拡張したものであり、SKLE と統計物理モデルとの対応の研究は今後に残された興味深い課題である。

(3) 1次元開区間上の極小拡散過程 X は、3個の特性量 s, m, k によって定まることが知られているが、実は X は m に関して対称であり、 X のディリクレ形式が s, m, k を用いて同定されることが、本研究により初めて証明された。

これに基づいて、 X の m 対称な拡散拡張の全体のディリクレ形式も同定され、付随する境界条件がディリクレ形式の再生核を媒介にして、伊藤・マッキーンによる一般境界条件と関連づけられた。

その結果、伊藤・マッキーンによって考察された X の拡散拡張の全体は、自明なものを除いては、対称であることが明らかとなった。そして拡散拡張の構成は、 s, m, k と一般境界条件から自然に定まる正則ディリクレ形式によって直接的に実行できることが明らかになった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)、

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① M. Fukushima, On general boundary conditions for one-dimensional diffusions with symmetry, Journal of Mathematical Society of Japan, 査読有, (2013), In Press
- ② Z.-Q. Chen, M. Fukushima, A localization formula in Dirichlet form theory, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, 140, (2012), 1815-1822
- ③ M. Fukushima, T. Uemura, Jump-type Hunt processes generated by lower bounded semi-Dirichlet forms, The Annals of Probability, 査読有, 40, (2012), 858-889
- ④ M. Fukushima, From one dimensional diffusions to symmetric Markov processes, Stochastic Processes and their Applications, 査読有, 120, (2010), 590-604

〔学会発表〕（計 3 件）

- ① 福島 正俊、Brownian motion with darning applied to KL and BF equations for planar slit domains, Stochastic Analysis and Applications, German-Japanese bilateral project, 2012 年 9 月 26 日, 岡山大学
- ② 福島 正俊、On Brownian motion with darning and Komatu-Loewner equation for multiply connected planar domains, Foundation of Stochastic Analysis, 2011 年 9 月 20 日, Banff, Canada
- ③ 福島 正俊、Jump-type Hunt processes generated by lower bounded semi-Dirichlet forms, 4-th International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, 2010 年 8 月 30 日, 関西大学

〔図書〕（計 2 件）

- ① Z.-Q. Chen, M. Fukushima, Princeton University Press, Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory, (2012), 1-479
- ② M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, De Gruyter, Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes, 2-nd revised and extended edition, (2010), 1-489

6. 研究組織

(1) 研究代表者

福島 正俊 (FUKUSHIMA MASATOSHI)
大阪大学・その他部局等・名誉教授
研究者番号：90015503