

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540128

研究課題名(和文) 数論を起源とする確率変数列に関する極限定理の研究

研究課題名(英文) Research on limit theorems for random sequences arising from number theory

研究代表者

杉田 洋 (Sugita, Hiroshi)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：50192125

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：確率論は元来、自然や社会における偶然現象を起源とした問題を扱ってきた。それに対して本研究ではその起源を密度定理や概周期関数のような数論的対象に求めることを目的とした。その結果、密度定理を確率論的に厳密に扱うための枠組みと、それによる新たな極限定理の発見、概周期関数を確率変数とみなす方法とそれに関する極限定理による定式化などを行うことができた。

研究成果の概要(英文)：Probability theory has dealt with problems arising from random phenomena in nature and society, but this research seeks origins of probability in objects of number theory, such as density theorems and almost periodic functions. As a result, we could establish the framework to deal with density theorems and almost periodic functions and discover some new probabilistic limit theorems about them.

研究分野：確率論

キーワード：極限定理 密度定理 数論 ランダム行列 概周期関数 一般ディリクレ級数

1. 研究開始当初の背景

18世紀にオイラーが今日でいうリーマンのゼータ関数を導入して以来、数論にも解析学の種々の手法が有効であることが明らかになってきた。19世紀になると、素数の分布を求めることが大きな目標となり最終的には19世紀末に素数定理として結実する。素数定理は「密度定理」の一つであり、素朴な意味で確率論の考えに基づいている。エルデーシュやカツらは積極的に確率論を応用し、様々な数論的関数の大域的性質について密度定理という形で研究した([2])。この流れは、確率的数論と呼ばれるようになり、今日では繁栄を見ている([1])。

密度定理そのものは純粋の確率論の定理というわけではない。これを厳密に確率論の言葉で記述する努力も払われてきた。エルゴード理論による定式化がその主な手法であるが、この際、有理整数環 \mathbf{Z} の様々なコンパクト化などが利用された([5]など)。近年では、ランダム行列理論のレベル間隔分布とリーマンのゼータ関数の零点分布の類比などが指摘され、新たな局面を迎えている。この方面の近年の世界的な研究動向は、たとえば[3]等より明らかである。松本耕二やラウリンチカスらは z ゼータ関数や L 関数のもつ確率論的な側面の研究している([4])。

このように、現在では、数論と確率論の研究はかなり充実してきている。

<引用文献>

[1] Elliott, P. D. T. A., “Probabilistic number theory” I, II. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 239, 240. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979, 1980.

[2] Kac, M., “Statistical independence in probability, analysis and number theory”, The Carus Mathematical Monographs, No. 12. Published by the Mathematical Association of America. Distributed by John Wiley and Sons, Inc., New York 1959.

[3] “Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory”, ed. by F. Mezzadri and N. C. Snaith, London Math. Soc. Lecture Note Series 322, 2005.

[4] 松本耕二, ゼータ関数の確率論的値分布論, 「数学」53-3 岩波書店, (2001), 279-296.

[5] Sugita, H. and Takanobu, S., The probability of two integers to be co-prime, revisited—on the behavior of CLT-scaling limit. Osaka J. Math. 40 (2003), no. 4, 945-976.

2. 研究の目的

本研究の目的は、数論を起源とするような新たな確率論の極限定理の発見とその解析にある。元来、確率論はランダムな自然現象、社会現象を理解・分析を行うために編み出された数学である。様々な確率論の概念は、そうしたランダムな現象を起源に定義され、様々な確率論の定理はそうしたランダムな現象の理解と解明を目指してきた。それに対して、本研究は確率論の新たな源泉を応用分野ではなく、数学自身の中に、それも数論という純粋数学の中核に求める、という点で独創的である。

具体的には以下のような研究課題を当初設定した。(1)数論的関数のランダム化,(2)一様分布列のランダム化,(3)数論的極限定理を有限整アデール環上の確率論的極限定理として捉えること。

3. 研究の方法

本研究は基本的に理論研究である。連携研究者、研究協力者や多数の研究會など様々な学問的交流の中でお互いアイデアを出し合い、研究を推進していくというスタイルをとる。さらに研究のための資料として、各種文献図書の収集を行う。しかし理論的知見はいつも簡単に得られるものではなく、むしろ、アイデアの枯渇から立ち往生することも多い、そこで、実験的知見を得るために、補助的にコ

ンピュータを利用した数値実験(モンテカルロ法など)を取り入れることもある。

4. 研究成果

本研究の実施時期と、研究代表者の研究室に所属した大学院留学生 T. K. Duy 氏(のちに学振特別研究員, さらに九州大学 IMI 助教)が理学博士号(大阪大学)を取得する時期とが重なり, 豊かな研究成果を上げることができた。以下では, 主として T. K. Duy 氏との共同研究で得られた研究成果について, ほぼ時系列に沿って報告する。

- (1) どの素数の k 乗でも割り切れない整数を k -th power free integer と呼ぶ。1 から N までの整数のうち k -th power free であるものの割合は $N \rightarrow \infty$ のとき, $1/\zeta(k)$ に収束する。ここで ζ はリーマンのゼータ関数である。我々はこの収束の速さを詳しく計算し, 有限整アデール環上の確率論的極限定理として捉えることを目標にした。T. K. Duy 氏は, その研究において決定的な計算方法を見出して収束のオーダーを完全に決定し, その結果を学会発表(①2010/9/15)し, さらに論文①にまとめた。(前項(3)に属する研究)
- (2) 極限周期的算術関数と有限整アデール環上の確率変数の間に 1 対 1 対応があることは知られていたが, 我々はその対応および逆対応を具体的に完全な形で書き下した。その結果, 加法的算術関数や乗法的算術関数の「平均」に関する古典的な議論が有限整アデール環上の積分として統一的に理解できることが分かった。また, T. K. Duy 氏はそれらの関数のフーリエ級数が L^q -収束することを証明した(論文②)。(前項(3)に属する研究)
- (3) 一様分布列は単位区間上の定積分の近似計算に用いられるが, 変動の大きい関数の積分には不向きであった。我々は無理

数回転の軌道として得られる一様分布列であるワイル列を, その無理数パラメータを一様分布確率変数で置き換えてランダム化し, 単位区間上の定積分の数値計算に用いると, 変動の大きい関数の積分値のよい近似値を高い確率で得られることを見出した(ランダム・ワイル・サンプリング)。ランダム化する際の乱数は少量で済むので, 通常のモンテカルロ法に比べて格段の信頼性と精度が得られる。(著書①)。(前項(2)に属する研究)

- (4) T. K. Duy 氏および高信敏氏(連携研究者)との共同研究で次の結果を得た; 1 から N までの整数のうち k -th power free であるものの割合は $N \rightarrow \infty$ のとき $1/\zeta(k)$ に収束する。ここで ζ はリーマンのゼータ関数である。この収束の速さは論文①でそのオーダーが決定されたが, さらに, オーダーに掛かる係数まで完全に解明した。手法は昨年度の研究と同様, 有限整アデール環を用いるものである(論文⑦)。(前項(3)に属する研究)
- (5) リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ と並んで有理整数環上の指標からなるディリクレ級数は数論の重要な研究対象である。これをさらに拡張した一般ディリクレ級数は虚軸に平行な直線上では概周期的になり適切なコンパクト化の下でハール測度を持ち, それに関して一般ディリクレ級数はフーリエ級数の拡張と考えることができる。この一般ディリクレ級数について, フーリエ級数に関するカールソンの定理が, まったく自然な条件の下に成り立つことが示せた(論文③)。(前項(1)に属する研究)
- (6) 前項の成果は, 一般ディリクレ級数の虚軸に平行な直線上での性質であったが, それを複素平面上の領域(当該関数が正則となる領域, または有理型となる領域)で考えて確率論的考察を行った。とくに

ラウリンチカスの先行結果における係数の一次独立性を外した場合に詳しい結果を得た(論文⑤⑥)。(前項(1)に属する研究)

- (7) 新天地を求めて, ランダム行列に関して研究を行った. この研究対象は素数の詳しい分布を予言するリーマンのゼータ関数の零点分布と関連のあることが予想されているため本研究の趣旨に沿うものである. ランダム行列のあるクラス(ウィグナー行列)について固有値の集合の経験分布(empirical distribution)は半円則(ウィグナー分布)に収束するという, シナイらによる定理がある. 我々は, 経験分布ではなくて, より内在的なスペクトル測度で見て, 固有値の集合の分布が, やはり半円則に収束することを見出した. さらに, その精密化として, k 次モーメントの分布に関して中心極限定理が成り立つためのウィグナー行列の持つべき条件を決定した(論文⑧).

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① Trinh Khanh Duy, On the distribution of k -th power free integers, *Osaka J. of Math.*, 査読有, Vol. 48 No. 4, 2011, 1027-1045.
- ② Trinh Khanh Duy, Limit-periodic arithmetical functions and the ring of finite integral adeles, *Lith. Math. J.*, 査読有, Vol. 51 No. 4, 2011, 486-506.
- ③ Trinh Khanh Duy, Carleson's theorem for general Dirichlet series, *Analytic and probabilistic methods in number theory*, 査読有, 119-129, *TEV, Vilnius*, 2012.
- ④ Trinh Khanh Duy, Remarks on value

distributions of general Dirichlet series. *Functions in number theory and their probabilistic aspects*, 49-68, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, B34, *Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto*, 2012.

- ⑤ On convergence of Fourier series of Besicovitch almost periodic functions, *Lith. Math. J.*, 査読有, Vol. 53 No. 3, 2013, 64-279.
- ⑥ Trinh Khanh Duy, On convergence of Fourier series of Besicovitch almost periodic functions, *Lith. Math. J.*, 査読有, Vol. 53 No. 3, 2013, 264-279.
- ⑦ Trinh Khanh Duy, Takanobu, Satoshi, On the distribution of k -th power free integers, II, *Osaka J. Math.*, 査読有, Vol. 50 No. 3, 2013, 687-713.
- ⑧ Trinh Khanh Duy, Central limit theorem form moments of spectral measures of Wigner matrices, *Osaka J. Math.* 査読有, 掲載予定.

[学会発表] (計 7 件)

- ① Trinh Khanh Duy, "Besicovitch's limit periodic functions and L^q -spaces over the ring of finite integral adeles", Number Theory and Probability. (20100915). 京都大学数理解析研究所
- ② Trinh Khanh Duy, Hiroshi Sugita, "On Value Distributions of General Dirichlet Series", 解析数論セミナー. (20110303). 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
- ③ 杉田洋, "モンテカルロ法, 乱数, および疑似乱数", 東北大学大学院理学研究科数学教室談話会. (20110711). 東北大学, 仙台, 宮城県(招待講演)
- ④ Trinh Khanh Duy, "Carleson's Theorem

for General Dirichlet Series”, The 5th International Conference in Honour of J. Kubilius. (20110905). Palanga(リトアニア共和国)

- ⑤ 杉田洋, “モンテカルロ法, 乱数, および疑似乱数” 第 16 回自然科学研究教育センター講演会. (20120510). 慶応義塾大学(招待講演)
- ⑥ 杉田洋, “モンテカルロ積分のための疑似乱数生成器” 統計数理研究所共同利用研究「エルゴート理論, 情報理論, 計算機科学とその周辺」. (20130315). 大阪大学(招待講演)
- ⑦ 杉田洋, “確率と乱数” 日本数学会年会市民講演会. (20130324). 京都大学(招待講演)

[図書] (計 3 件)

- ① SUGITA, Hiroshi, Mathematical Society of Japan, *Monte Carlo method, Random number, and Pseudorandom number*, 2011, 133.
- ② 松本耕二, 秋山茂樹, 福山克司, 仲田均, 杉田洋, 玉川安騎男, *Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B34, 2012, 475.
- ③ 杉田洋, 数学書房, 確率と乱数, 2015, 140.

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sugita/mathematics.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

杉田 洋 (SUGITA, Hiroshi)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50192125

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

盛田健彦 (MORITA, Takehiko)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00192782

高信 敏 (TAKANOBU, Satoshi)
金沢大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：40197124

白井 朋之 (SHIRA, Tomoyuki)
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授
研究者番号：70302932

福山 克司 (FUKUYAMA, Katusi)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60218956

(4) 研究協力者

トゥリン カーン デュイ (TRINH, Khanh Duy)
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・助教
研究者番号：00726127