様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　5 月　18 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2012
課題番号：22540134
研究課題名（和文）　ランキングの統計解析と超平面配置

研究課題名（英文）　Statistical analysis of rankings and hyperplane arrangements

研究代表者
紙屋　英彦（KAMIYA　HIDEHIKO）
名古屋大学・経済学研究科・教授
研究者番号：50300687

研究成果の概要（和文）：超平面配置の理論における一般的な設定で，コクセター群の作用の下で不変な超平面配置の性質を考察し，この超平面配置の部屋の軌道の数に関する結果などを得た．その一般的な結果をランキングの問題に適用することにより，余次元 1 の展開モデルで生成される本質的に異なるランキング・パターンの exact な数を求めた．また一般的な結果を別の問題に適用することにより，semiorder と呼ばれる選好順序の性質も考察した．さらにこれらとは別に，群不変性の一般的な設定で，分布族の定義とその性質の解明を行った．

研究成果の概要（英文）：In the general setting of the theory of hyperplane arrangements, we studied properties of a hyperplane arrangement which is stable under the action of a Coxeter group and obtained some results such as the number of the orbits of the chambers of this arrangement. Moreover, applying the general results to the problem of rankings, we found the exact number of essentially different ranking patterns which can be generated by the unfolding model of codimension one. Applying the general results to another problem, we also investigated properties of a preference order called semiorder. Besides, we defined a family of distributions and examined its properties in the general setting of group invariance.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総　計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：　数理統計学
科研費の分科・細目：　数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：　統計数学

１．研究開始当初の背景

ランキングは社会のいたるところで見られるものであり，その解析は，統計学においても古くから重要な研究対象とされてきた．特に近年においては，例えばインターネットの検索エンジンとの関連などにおいても，ランキングの研究は益々重要性を増している．他方，純粋数学における超平面配置の理論は，

素朴な組合せ論の問題として古くから興味の対象となってきたが，近年はトポロジー，可換代数，代数幾何学，表現論，さらには超幾何積分など解析幾何的な面からも活発に研究がなされている重要な研究分野である．

実はランキングの問題においては，超平面配置の理論が本質的に重要な役割を演じる場面が多く見られる．計量心理学者の C. H. Coombs によって 1950 年代に提唱された展開モデルはその一つである．展開モデルは，最初 Coombs によって提案されたときには 1 次元のモデルであったが，その後多次元版に拡張され，現在では計量心理やマーケティング・サイエンスにおける基本的なモデルの一つとされている．さらに例えば項目反応理論など他の統計理論モデルの中でもその基本的な考え方が用いられることがあり，展開モデルはその意味でも重要なモデルである．

展開モデルにおいては，ランク付けされるべき対象たちが，ユークリッド空間内の点として表わされると仮定する．さらにそれらの対象たちをランク付けする個人の方も，同じユークリッド空間内の１つの点（理想点と呼ばれる）として表わされると考える．そして個人は，ユークリッド空間内で対象点が理想点に近い対象から順に，対象たちをランク付けする，と想定するのが展開モデルである．展開モデルの問題は，対象点のすべてのペアの２等分超平面からなる超平面配置の問題に帰着することが分かる．

研究代表者は本研究開始当初までに，竹村彰通教授（東京大学）や寺尾宏明教授（北海道大学），Peter Orlik 教授（Wisconsin 大学）とともに，超平面配置の理論の近年の成果を応用することにより，展開モデルの様々な性質を導いてきた．

まず Kamiya and Takemura (1997) では，Zaslavsky (1975) による実超平面配置の部屋数に関する一般的な結果を用いることにより，展開モデルで生成されるランキングの個数を第１種スターリング数で表わす公式を与えると同時に，このモデルで生成されるランキングの様々な性質を導いた．また Kamiya and Takemura (2000) では，同様の問題を超球面上で考察した．さらに Kamiya and Takemura (2005) では，超平面配置の理論における coning の考え方を用いることにより，展開モデルで生成されるランキングの特徴付けの問題を解決した．そこで解かれたのは，対象点たちが与えられた際の生成されるランキングの特徴付けであった．これに対し，生成されるランキングの集合（ランキング・パターンと呼ぶ）が，対象点たちをユークリッド空間内で動かしたときにどれくらい多く存在するか，というより難しい問題がある．これは展開モデルの制約の強さに関する問題であり，選好ランキングのモデルとしての展開モデルにとって非常に重要な問題である．実際この問題については早くから，対称群の表現論で有名な R. M. Thrall が，Thrall (1952) において，1 次元展開モデルの場合のランキング・パターン数の上限を与えている．これは上限であり，exact な数は 1 次元の場合でさえ難しく，長らく未解決であった．しかし本研究代表者らは Kamiya, Orlik, Takemura and Terao (2006) において，1 次元の場合のランキング・パターン数の問題を，超平面配置の問題として考えることにより解決した．

多次元の場合のランキング・パターンの問題はさらに難しいが，次元による制約が最も緩い場合（余次元１の場合と呼ぶ）のランキング・パターンの個数については，求めることが出来ていた．しかしそこでは，見かけ上異なるランキング・パターンの個数を求めただけであった．実際には，対象の単なるラベ

ルの付け替えだけで互いに得られるランキング・パターンは本質的には同じものと考えられるため，その意味で本質的に異なるランキング・パターンの個数に関心がある．1 次元の場合には，見かけ上異なるランキング・パターンの個数が得られれば，本質的に異なるランキング・パターンの個数は全く自明に得られるが，余次元 1 の場合にはこれはそれほど容易ではない．

以上が，本研究開始当初の背景である．

２．研究の目的

本研究は，超平面配置やその他の代数的方法を用いて，ランキングの確率・統計モデルの性質を解明することを，主たる目的とする．具体的には，展開モデルのランキング・パターンに関する未解決問題に取り組む．またランキング以外の統計科学の問題を，超平面配置の理論や代数的方法を用いて解決することも目的とする．さらに，統計科学の問題に応用しやすいように，超平面配置の理論自体を発展させることも目的とする．以下ではこれらを，より具体的に述べる．

「１．研究開始当初の背景」で述べたように，余次元 1 の展開モデルにおいて，見かけ上異なるランキング・パターンの個数は既に求められていたが，本質的に異なるランキング・パターンの個数の問題は未解決であった．本研究では，まずその問題を解決することを目指した．特に，この個数の上限や，対象数が小さい場合の具体的な個数を求めるのではなく，対象数が一般の場合の exact な個数を求めることを目的とした．

この問題を考える際には，all-subset 配置という特定の超平面配置への対称群の具体的な作用を考えることになる．しかし抽象的な設定で，一般のコクセター群の作用を考えた方が，問題の見通しがよくなると思われる．ここでは必要に応じて，超平面配置の一般論自体も展開したいと考えた．本研究開始以前にも研究代表者らは，ランキング・パターンの具体的な個数を数値的に求めるために，超平面配置の理論におけるいわゆる有限体法の一般化・拡張を行ってきたことがある．本研究でも，統計科学の問題の解決を動機として，超平面配置の理論における一般的な成果を導くことを，もう 1 つの目的とした．

同時に，そのような一般論を展開することで，そこでの結果をランキング・パターン以外の問題にも応用できる可能性がある．本研究では，そのような応用も目指した．

またランキング以外の統計科学の問題でも，超平面配置やその他の代数的方法を有効に用いることで解決できるものが多いと思われた．そのような問題に取り組むことも，本研究の目的とした．

３．研究の方法

「２．研究の目的」で述べたように，余次元 1 の展開モデルの本質的に異なるランキング・パターン数の問題は，コクセター群の超平面配置への作用という一般的な超平面配置の理論の問題として考察する方が，見通しがよい．そのためランキング・パターン数の問題を考える際には，対称群の all-subset 配置への具体的な作用を直接調べるのではなく，抽象的な設定で超平面配置における一般的な結果を導き，その結果をここでの問題に適用する，という方法を取ることとする．

semiorder（あるいは unit interval order）と呼ばれる選好順序のモデルは，経済学あるいは数理心理学の分野において，非推移的な無差別関係を説明するために R. D. Luce が導入したモデルである．実はこの semiorder は，いわゆる組みひも配置のある種の deformation（semiorder 配置という）の部屋と 1 対 1 対応にあり，超平面配置の問

題として考察できる．このように semiorder を超平面配置の問題として捉え，ランキング・パターンの問題を動機として展開した一般的な結果を適用することで，semiorder の性質を考察する．

ランキングとは別の統計科学の問題として，いわゆる v-球面分布を考える．これは楕円型分布を一般化した多次元分布であり，楕円型分布よりも柔軟なモデルとして有用な分布である．v-球面分布の下では，ある種の統計量の分布やパラメータの事後分布が density generator に依存しないという意味での頑健性に関する結果が知られている．しかし実は v-球面分布における議論は，抽象的に変換群の作用の下での不変性の問題として考えることにより，ランダム行列の分布なども含む一般的なケースに拡張できる．このように変換群の作用の下での不変性の問題として抽象的に議論することで，v-球面分布とその下での性質を一般化する．

４．研究成果

本研究の成果として，まずコクセター群の作用の下で不変な超平面配置に関する一般的な結果を導出したことがある．その一般的な結果を利用して，余次元 1 の展開モデルにおける本質的に異なるランキング・パターンの exact な個数を求めた．さらに，一般的な結果を別の超平面配置に応用することにより，semiorder という選好順序の考察も行った．次にこれらとは別に，代数的な方法を用いて，v-球面分布の拡張を行ったことも，本研究の成果である．これらの成果について，より具体的に以下で述べる．

まず，コクセター群の作用の下で不変な超平面配置に関して導いた主要な結果は，以下の通りである．コクセター群 W の作用の下で不変な実超平面配置 B を考える．このとき W は，B の部屋全体の集合に自然に作用する．ここで B が，W のコクセター配置 A と交わりを持たないとする．このとき，B の部屋全体の集合内の W-軌道たちが，A と B を合わせた配置 C の部屋たちのうち A の任意に固定した 1 つの部屋に含まれるものたちと，1 対 1 に対応することを示した．この事実から，B の部屋の W-軌道たちの数が，C の部屋の数を W の位数で割ることで得られることが分かった．

この一般的な結果を利用して，余次元 1 の展開モデルにおける本質的に異なるランキング・パターンの exact な数を以下のようにして求めた．W として対称群を取る．このとき A は，組みひも配置となる．また B として，all-subset 配置を取る．ここで，all-subset 配置の部屋のうち例外的な部屋を除いたものたちが，余次元 1 の展開モデルのランキング・パターンたちと 1 対 1 に対応することが分かっている．また，本質的に同じランキング・パターンたちは all-subset 配置の部屋たちの 1 つの W-軌道を成しており，かつ例外的な部屋たちの全体は 1 つの W-軌道を成していることも分かっている．このことから，本質的に異なるランキング・パターンの数が，W-軌道の数より 1 小さい値に等しいことが分かる．ここで，本研究で展開した一般論における上述の結果を用いることにより，この値が組みひも配置と all-subset 配置を合わせた配置の部屋の数をランク付けされる対象の数の階乗で割った値から 1 を引いた値に等しいという結果を得た．

また，本研究で展開した一般論を semiorder という選好順序のモデルへも応用した．A として対称群を取り，B として semiorder 配置を取る．このとき C はカタラン配置となるが，この場合に一般論を適用することにより，semiorder の性質を考察した．

なおカタラン配置の場合には，対称群の元で固定される semiorder 配置の部屋数の和としてカタラン配置の部屋数を表わすことができることが知られているが，この関係が我々の一般的な枠組みで成り立つことも確かめた．

本研究では，ランキングや選好順序以外の統計的問題も，代数的な方法を用いて考察した．具体的には，一般的な不変性の枠組みにおいて，標本空間への変換群の作用を考え，それに基づく分布族を定義した．そしてその分布族に属する分布の下での統計量の分布やパラメータの事後分布などについて，いくつかの結果を導いた．より具体的には以下の通りである．標本空間にある群が作用するとし，その作用の下でのオービタル分解を考える．そしてこの分解における共変部分と，不変部分の（群に値を取る）関数との積にのみ密度が依存するような分布を考える．その上で，標本空間にもう 1 つ別の群が作用するとし，これら 2 つの群の作用により上述の分布から生成される分布族を定義した．ここで，2 つ目の群の元が興味あるパラメータを成し，1つ目の群の元が nuisance パラメータを成す．この分布族は，いわゆる v-球面分布族を群不変性の枠組みで一般化したものと見なすことができ，v-球面分布においては，1つ目の群の元が尺度パラメータに対応し，2つ目の群の元が位置パラメータに対応する．この一般的な分布族の下で，不変統計量の（帰無）分布や適当な事前分布を仮定した下での興味あるパラメータの事後分布が density generator に依存しないという意味での頑健性に関する結果を導いた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4 件）

① H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Arrangements stable under the Coxeter groups, Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics and Topology, CRM Series 14, Scuola Normale Superiore Pisa, 2012, 327-354, 査読有.
② 紙屋英彦, Null robustness and marginal equivalence associated with orbital decompositions, 「研究集会 数理統計学の沃野」報告集, 2012, 97-100, 査読無.
③ H. Kamiya, A. Takemura and N. Tokushige, Application of arrangement theory to unfolding models, Arrangements of Hyperplanes---Sapporo 2009, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 62, 2012, 399-415, 査読有.
④ H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Ranking patterns of unfolding models of codimension one, Advances in Applied Mathematics, Vol. 47, 2011, 379-400, 査読有.

〔学会発表〕（計　8 件）

① 紙屋英彦, Null robustness and marginal equivalence associated with orbital decompositions, 科研費研究集会「数理統計学の沃野」, 2012 年 11 月 23 日, 慶應義塾大学.
② 紙屋英彦, Rankings and hyperplane arrangements, Forum on Probability, Statistics, Algebra and Combinatorics, 2012 年 7 月 28 日, 名古屋大学 理学部.
③ H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Ranking patterns of unfolding models of codimension one, The 2nd Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting (IMS-APRM 2012), 2012 年 7 月 3 日, Tsukuba International Congress Center.
④ 紙屋英彦, 竹村彰通, 徳重典英, Application of arrangement theory to unfolding models, 2011 年度統計関連学会連合大会, 2011 年 9 月 5 日, 九州大学.
⑤ 紙屋英彦, Ranking patterns of unfolding models of codimension one (Joint work with A. Takemura and H. Terao), 名古屋統計セミナ・組合せ論セミナー, 2011 年 6 月 17 日, 名古屋大学 情報科学研究科.
⑥ 紙屋英彦, 竹村彰通, 寺尾宏明, Ranking patterns of unfolding models of codimension one, 科学研究費研究集会「計算代数と数理統計学の新たな展開」, 2010 年 11 月 16 日, 埼玉県さいたま市 大宮ソニックシティー.
⑦ 紙屋英彦, 竹村彰通, 寺尾宏明, Ranking patterns of unfolding models of

codimension one，2010 年度統計関連学会連合大会，2010 年 9 月 8 日，早稲田大学.

⑧ 紙屋英彦，選好ランキングの生成モデルとランキング・パターン，経済学研究科セミナー，2010 年 6 月 17 日，名古屋大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

紙屋　英彦　(KAMIYA　HIDEHIKO)

名古屋大学・経済学研究科・教授

研究者番号：50300687

(2)研究分担者なし

(3)連携研究者なし