

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月 8日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540137

研究課題名（和文）特異セレクターによる高次元エルデシー空間の分類

研究課題名（英文） Classification of Higher dimensional Erdős spaces by singular selectors

研究代表者

野倉 嗣紀 (NOGURA TSUGUNORI)

愛媛大学名誉教授

研究者番号：00036419

研究成果の概要（和文）：連続弱選択関数により生成される位相は元の位相空間の位相より弱いことが知られているが、元の空間の位相がその空間で定義されるいくつかの連続弱選択関数により生成されるとき CWS 空間という。本研究では CWS 空間の基本的な性質を確立すると共に、様々な具体的空間で CWS 数を求めた。また、積空間が弱 orderable になるための、必要条件、十分条件をしらべ、その応用として、 $G_0$  空間と第一可算空間の積が弱 orderable ならば、 $G_0$  空間の任意の部分空間は paracompact 性をもつこと、孤立点を持たない擬コンパクト空間  $X$  に関して、 $X \times X \times X$  が順序付け可能であることの必要十分条件は  $X$  がカントール集合と同相になることなどを示した。

研究成果の概要（英文）：It is well known that topologies generated by continuous weak selections are weaker than the original topologies. We call a space is CWS if the topology is generated by continuous weak selections. We have established the fundamental properties of CWS spaces and calculate the CWS numbers of several examples. Also we investigate the weak orderability of product spaces. As applications we show that if the product of a  $G_0$ -space and a first countable space is weakly orderable, then the  $G_0$ -space must be hereditarily paracompact. Also we have shown that a pseudocompact space without isolated point is homeomorphic to the Cantor set if and only if its cube  $X \times X \times X$  is weakly orderable.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：順序数空間、連続弱選択関数、超空間、次元

### 1. 研究開始当初の背景

連続弱選択関数を許容する空間とその連続選択関数により定義される自然な位相との関連を確立することが望まれていた。特に各種位相不変量、次元、位相濃度などの関係を明らかにすることが求められていた。

### 2. 研究の目的

(1) 研究の目的 連続弱選択関数で生成される位相と元の位相構造との関連を明らかにする。

(2) 連続弱選択関数を許容する空間と各種次元との関連を解明する。

(3) 連続弱選択関数を許容する空間と順序付け可能空間との関連を明らかにする。

### 3. 研究の方法

(1) 愛媛大学内で定期的にゼミを開催し共同研究をすすめた。

(2) 海外共同研究者とは日常的に電子メールで意見交換を行った。

(3) 海外共同研究者と年1回相互に訪問し、共同研究を行った。

### 4. 研究成果

本研究の具体的な結果：位相空間  $X$  の積空間  $X \times X$  から  $X$  への連続写像  $\sigma$  が  $\sigma(x, y) \in \{x, y\}$  を満たすとき連続弱選択関数と呼ぶ。連続弱選択関数が存在すればそれにより擬順序が定義され、その擬順序により  $X$  に新たに位相が定義される。これを弱選択関数により生成される位相と呼ぶ。この位相は元の位相より弱いことが知られており、 $X$  が orderable である場合には  $X$  で定義される任

意の弱選択関数により生成される位相は元の位相と一致する。また、Sorgenfrey 直線は (orderable でない) suborderable 空間であるが、適当な連続弱選択関数を構成することにより、それにより生成される位相が元の位相に一致することが知られている。

本研究では

(1)  $X$  の位相がいくつかの連続弱選択関数により生成される場合に、その個数と  $X$  の位相的不変量、 $X$  の濃度、位相濃度、局所位相濃度との関連を示す不等式を確立した。

また、Suborderable 空間では少なくとも2つの連続弱選択関数により生成される位相により、元の位相が得られるのではないかと予想されていたが、本研究ではこの問題を解決し、

(2) 一般連続体仮説を仮定すれば任意の無限濃度  $\alpha$  に対し  $\alpha +$  個の連続弱選択関数で元の位相は生成できるが、 $\alpha$  個以下では生成できない例を構成した。ここで  $\alpha +$  は  $\alpha$  の次の濃度である。また、Filter により生成される1点のみが孤立点でない空間において同様な例を構成した。

(3) 2つの Filter 空間の積空間が連続弱選択関数を許容すれば一方の non-isolated point は他方の到達集合の濃度以下の開集合の共通部分として表される。

(4) Filter 空間と順序数空間の積が連続弱選択関数を許容するための十分条件を求めた。

これらの応用として、

(1) 位相空間  $X$  と suborderable 空間  $Y$  との積空間  $X \times Y$  が連続弱選択関数を許容すれば  $X$  の任意の部分空間は paracompact 性を

持つ。

(2) 離散でない位相空間  $X$  と  $Y$  の積空間  $X \times Y$  が連続弱選択関数を許容すればどちらの空間の連結成分も 1 点になること (totally disconnected) 等が得られた。

また、連続弱選択関数を許容する空間の積空間が弱選択関数を許容する空間への応用として、Baire system を導入し、これに関し、

(3) Baire system を持つ空間の部分空間、可算積空間は再び Baire system をもつ。

(4) Baire system を持つ空間は弱選択関数を許容する。

(5) 孤立点を持たない疑コンパクト空間  $X$  がカントール集合に同相になるための必要十分条件は  $X \times X \times X$  が順序だけ可能なことである。

等の結果を示した。

これらの成果により連続弱選択関数を許容する空間と順序付け可能空間 (orderable, suborderable, weakly orderable) との関連が解明された。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① Garcia-Ferreira, S; Miyazaki, K; Nogura T.; Tomita, A. H. Topologies generated by weak selection topologies, Houston J. Math. (accepted) (査読有)
- ② Garcia-Ferreira, S; Miyazaki, K; Nogura, T.; Weakly orderability for products, Topology Appl. (accepted) (査読有)
- ③ Nagao, M.; Shakhmatov D., On the existence of kings in continuous tournaments, Topology Appl. 159 (2012) 3089-3096 (査読有)
- ④ Dikranjan D.; Shakhmatov D., Quasi convexity dense and suitable sets in the arc component of a compact group, Math. Nachr. 285 (2012) 476-485 (査読有)
- ⑤ Dikranjan D.; Shakhmatov D. A Kronecker-Weyl theorem for subsets of abelian groups, Adv. Math. 226 (2011) 4776-4795
- ⑥ Dikranjan D.; Shakhmatov D.; Spevak J, Productivity of sequences with respect to a given weight function, Topology Appl. 158 (2011) 298-324 (査読有)
- ⑦ Gutev V.; Nogura T., Weak orderability of topological spaces, Topology Appl. 157 (2010) 1249-1274 (査読有)
- ⑧ Gutev V.; Nogura, T., Set-maximal selections, Topology Appl. 157 (2010) 53-61 (査読有)
- ⑨ Dikranjan D.; Shakhmatov, D. The Markov-Zariski topology of abelian group, J. Algebra 324 (2010) 1125-1158 (査読有)
- ⑩ Dikranjan D.; Shakhmatov D., Hewitt-Marczewski-Pondiczery type theorem for abelian groups and Markov's potential density, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010) 2979-2990 (査読有)
- ⑪ Shakhmatov D.; Spevak J, Group valued continuous functions with the topology of pointwise convergence, Topology Appl. 157 (2010) 1518-1540 (査読有)

[学会発表] (計 5 件)

- ① Nogura T., Topologies generated by weak selection topologies,

International conference of Topology  
and related topics 南京, (中国) 2012,  
9月 (招待講演)

- ② Shakhmatov D., Graphtheoretic aspect of  
continuous weak selection, IVth  
Workshop on Coverings, Selections and  
Games in Topology, Caserta (Italy) 20  
12年6月 (招待講演)
- ③ Shakhmatov D. Metrizability of compact  
groups via conditions on their dense  
subgroups, TOPOSYM 2011, Prague (Czech  
Republic) 2012, 6月 (招待講演)
- ④ Shakhmatov D. Two decades of  
pseudocompact group topologization  
problem Barcelona (Spain) 2010, 7月  
(招待講演)
- ⑤ Shakhmatov D., Topological properties  
of the Markov-Zariski topology of an  
abelian group, 2010 International  
conference on Topology and its  
Applications, Nafpaktos (Greece) 2010,  
6月 (招待講演)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

野倉 嗣紀 (NOGURA TSUGUNORI )

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：00036419

### (2) 連携研究者

シャクマトフ デイミトリ (SHAKHMATOV  
DMITRI)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：90253294