様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 29 日現在

機関番号：16301
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010～2012
課題番号：22540138
研究課題名（和文）　密度依存型の拡散項をもつ２種競争系の解構造に関する研究

研究課題名（英文）　Structure on the Set of Stationary Solutions for a Two Competing Species Model with Density-Dependent Diffusion

研究代表者
観音　幸雄（KAN-ON YUKIO）
愛媛大学・教育学部・教授
研究者番号：00177776

研究成果の概要（和文）：　本研究では，競争関係にある２種の個体群密度の動態を記述する密度依存型の拡散項をもつ反応拡散系（２種競争系）について，生物の住処をある球の内部とし，研究対象とする解を球対称正値定常解に制限したときの解構造について研究を行った．この解構造を特定するために，住処の次元を示すパラメータは整数値だけでなく，実数値も取ることができるとし，系に含まれる拡散係数が零に十分に近い場合について，分岐理論や比較定理などを用いて，定常解のまわりでの線形化作用素の性質を調べた．

研究成果の概要（英文）：　In this research, we study the structure on the set of radially symmetric positive stationary solutions for a two competing species model with density-dependent diffusion, when the habitat of the community is the inside of a ball. Although the dimension of the habitat is an integer, we assume that it can be any real number. To establish the structure, we focus on the case where the diffusion rate of the species is positive and sufficiently small, employ the bifurcation theory and the comparison principle, and then investigate the property of eigenvalues and their corresponding eigenfunctions for the linearized operator around the stationary solution.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：　数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：　応用数学，数理モデル

１．研究開始当初の背景

数理科学者ロトカと数学者ヴォルテラによって提案された競争関係にある２種の個体群密度の動態を記述する反応拡散系（後で述べられる古典的な２種競争系）を調べると，２種が安定に共存できるのは，自己抑制効果が相手からの抑制効果より大きい場合であり，その他の場合には共存は困難であることが数学的に確認できる．しかし，現在，多くの生物が互いに競争しながらも，共存している．これらのことから，競争関係にある種がどのような環境のもとで共存ができるのか，

もし共存が可能なら，どのような生息パターンを示すのかという問題を解決することは重要な意味を持っている．

競争関係にある２種の共存問題を研究するために，重定・川崎・寺本（1979）は，相手の個体群密度が高くなればなるほど，その場所から遠ざかる傾向をもつ拡散効果を導入した反応拡散系（以下では，２種競争系と呼ぶ.）

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w = \varepsilon\Delta\left[(1+\alpha z)w\right] + (1-w-cz)w, \\ \frac{\partial}{\partial t} z = \varepsilon d\,\Delta\left[(1+\beta w)z\right] + (a-bw-z)z, \\ \qquad\qquad\qquad x\in\Omega,\quad t>0, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} w = 0,\quad \frac{\partial}{\partial \nu} z = 0,\quad x\in\partial\Omega,\quad t>0 \end{cases}$$

を提案した．ここで，パラメータα，βは非負の値，その他は正の値を取る．Ωは滑らかな境界$\partial\Omega$をもつ$\mathbf{R}^{\ell}$の有界領域であり，νは$\partial\Omega$での外向き単位法線ベクトルである．

変数変換$u=(1+\alpha z)w$，$v=(1+\beta w)z$により，２種競争系は

$$\begin{cases} \Phi_{11}(u,v)\frac{\partial}{\partial t}u + \Phi_{12}(u,v)\frac{\partial}{\partial t}v \\ \qquad = \varepsilon\Delta u + f(u,v), \\ \Phi_{21}(u,v)\frac{\partial}{\partial t}u + \Phi_{22}(u,v)\frac{\partial}{\partial t}v \\ \qquad = \varepsilon d\,\Delta v + g(u,v),\quad x\in\Omega,\quad t>0, \\ \frac{\partial}{\partial \nu}u = 0,\quad \frac{\partial}{\partial \nu}v = 0,\quad x\in\partial\Omega,\quad t>0 \end{cases}$$

の形に書き直すことができる．$\alpha>0$または$\beta>0$のときには$\Phi_{12}\neq 0$または$\Phi_{21}\neq 0$となるので，２種競争系は通常の反応拡散系（$\Phi_{12}=0$，$\Phi_{21}=0$）よりも強いカップリングをしており，生物学的だけでなく，数学的な観点からも興味深い反応拡散系である．

２種競争系は多くの研究者によって盛んに研究され，いろいろな研究成果が得られているが，未だに十分な結果は得られていないように思われる．本研究では，変数w，zは競争関係にある２種の個体群密度を意味するので，すべての(t,x)に対して$w(t,x)>0$，$z(t,x)>0$をみたす正値解に着目する．

反応拡散方程式の場合には，比較定理やエネルギー関数などを用い，定常解の存在とその安定性を調べることができ，その結果として大域的アトラクタを決定できる．このことは，時間大域的な解挙動を理解するための重要な問題の一つは，定常解の大域的な解構造を調べることであると示唆している．

反応拡散系においては，エネルギー関数や比較定理は一般に期待できない．このことが定常解の存在や安定性などの解析を困難なものにする一つの要因となっている．２種競争系については，エネルギー関数は期待できないが，関係$\prec$を

$$(u_1,v_1)\prec(u_2,v_2) \quad\Leftrightarrow\quad u_1<u_2,\, v_1>v_2$$

により定義すると，$\alpha=\beta=0$の場合（本報告では，この場合の２種競争系を古典的な２種競争系と呼ぶ.）には，関係$\prec$に関して比較定理が成り立つことが知られている．このことは，２種競争系においては，パラメータα，βにより，比較定理が成り立つ反応拡散系から，一般のそれへと連続的に変形されることを意味している．

本研究では，研究代表者によるこれまでの研究を発展させることにより，２種競争系の正値解の解構造を特定し，生物の共存メカニズムの解明を試みる．特に，２種競争系を古典的な２種競争系からのパラメータα，βに関する連続的な変形として捉え，その解構造がどのように変化していくのかを調べる．

２．研究の目的

研究代表者はこれまでに，Ωを有界区間とした場合，および，Ωをある球の内部とした場合について，２種競争系の正値定常解の解構造を調べてきている．特に，Ωを有界区間とした場合には，古典的な２種競争系の正値定常解の解構造は完全に解明されおり，その構造はチェイフィ・インファンテ（1974/75）によって示された反応拡散方程式のそれと類似している，つまり，２種競争系をパラメータα，βに関する連続的な変形として捉えたとき，その出発点である古典的な２種競争系に関してはその解構造が完全に分かっている．しかしながら，２種競争系に対して適切な解法が未だに見つかっていないため，未解決問題が多く残されており，それらの解明を本研究の目標とした．

本研究では主に，Ωをある球の内部としたときの２種競争系の球対称正値定常解について研究を行った．そのような解は，$r=|x|$，$'=d/dr$としたとき，問題

$$(1)\qquad \begin{cases} 0 = \varepsilon r^{1-\ell}\,[r^{\ell-1}u']' + f(u,v), \\ 0 = \varepsilon d\, r^{1-\ell}\,[r^{\ell-1}v']' + g(u,v) \end{cases}$$

の正値解である．ここで，Ωが有界区間の場合は，問題（1）において$\ell=1$の場合とみなすことができる．パラメータℓは領域の空間次元を示す整数であるが，本研究では，整数値だけでなく，1以上の実数値を取ることができるパラメータと考え，ℓに関する問題（1）の正値解の解構造を調べる．

パラメータα，βを大きくしていくと，古典的な２種競争系から一般の反応拡散系の非線形項$\mathbf{f}(\mathbf{u})$へと連続的に変形されることから，最初の段階として，一般化された非線形項$\mathbf{f}(\mathbf{u})$をもつ反応拡散系の解構造について一般的な性質を調べることは重要である．そこで，$\mathbf{R}_+=(0,+\infty)$とし，

$$\mathbf{u}=(u,v),\qquad \mathbf{f}(\mathbf{u})=(f,g)(\mathbf{u}),$$

$$f(\mathbf{u}) = u\, f_0(\mathbf{u}), \qquad g(\mathbf{u}) = v\, g_0(\mathbf{u})$$

とおき，非線形項$\mathbf{f}(\mathbf{u})$が競争的な相互作用を表すように次の仮定をおく.

(A.1)　$f_0(\mathbf{0}) > 0$，$g_0(\mathbf{0}) > 0$であり，ある$\delta > 0$が存在して，すべての$\mathbf{u} \in \mathbf{R}_+^2$に対して

$$\max\{f_{0u}(\mathbf{u}), f_{0v}(\mathbf{u}), g_{0u}(\mathbf{u}), g_{0v}(\mathbf{u})\} < -\delta$$

が成り立つ.

(A.2)　$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$の解$\mathbf{e}_-$，$\hat{\mathbf{e}}$，$\mathbf{e}_+ \in \mathbf{R}_+^2$が存在し，

$$\mathbf{e}_- \prec \hat{\mathbf{e}} \prec \mathbf{e}_+, \qquad \det \mathbf{f}_\mathbf{u}(\mathbf{e}_\pm) > 0 > \det \mathbf{f}_\mathbf{u}(\hat{\mathbf{e}})$$

がみたされ，$\mathbf{e}_- \prec \mathbf{u} \prec \mathbf{e}_+$の範囲における$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$の解は$\hat{\mathbf{e}}$のみである.

仮定（A.1）は問題（1）において比較定理が関係$\prec$に関して成り立つことを意味する．また，仮定（A.1），(A.2）より，$\mathbf{e}_-$と$\mathbf{e}_+$は常微分方程式$\mathbf{u}_t = \mathbf{f}(\mathbf{u})$の局所的に漸近安定な平衡点であり，$\hat{\mathbf{e}}$は不安定な平衡点であることが容易に確認できる.

研究代表者によるこれまでの研究により，$\ell = 1$の場合には，古典的な２種競争系については，二次分岐は起きず，大域的な解構造が特定されている．しかし，仮定（A.1）をみたすある非線形項$\mathbf{f}(\mathbf{u})$に関しては，サドル・ノード型二次分岐の出現が数値的に指摘されており，大域的な解構造については未解決である．また，$\ell > 1$の場合には，定数解のまわりでの局所的な解構造は決定することができるが, 問題（1）に空間変数rが陽的に含まれていることから，$\ell = 1$の場合より解析が困難なものになり，解の一意性や空間的な様相などについて未解決問題が多く残されている.

本研究では，反応拡散方程式と問題（1）には解構造に関して類似点が多いことを考慮して，問題（1）の正値解の空間的な様相を数学的に調べ，２種競争系の球対称正値定常解の大域的な解構造を特定することを目的とした.

３．研究の方法

本研究においては，これまでに得られている古典的な２種競争系に関する様々な結果発展させ，分岐理論や比較定理などの数学的な手法を用いて，定常解の空間的な様相や，定常解のまわりでの線形化作用素の固有値および固有関数を調べ，２種競争系の大域的な解構造の研究を行った．その際に，

(i)　球対称性をもつ定常解の解構造
柳重則，観音幸雄

(ii)　球対称性をもたない定常解の解構造
門脇光輝，観音幸雄

と大まかなサブテーマと分担を定め，綿密な情報交換を行いながら，研究を進めた.

生物の住処が有界区間である場合（$\ell = 1$）に古典的な２種競争系においては，数値的な検証方法の一つである区間演算を用いて，定数定常解のまわりでの局所的な解構造を特定し，その数値解析的な結果と数学的な結果を総合することにより，正値定常解の大域的な解構造はチェイフィ・インファンテ（1974/75）により示された反応拡散方程式のそれと類似していることが示されている．そこでは，大域的な解構造の決定のために，数値解析的な手法が重要な役割を演じていることから，本研究では，数学的な手法だけではなく，数値計算や数値的な検証などの数値解析的な手法も取り入れ，研究を進めることにした.

４．研究成果

(a)　２種競争系の解構造

一般の場合について問題（1）の解構造を特定するのは困難であるため, 拡散係数$\varepsilon > 0$が十分小さい場合，つまり，$\varepsilon = 1$とし，$\mathbf{R}_+$で問題（1）を考察した．さらに，仮定（A.1），(A.2）に加えて，非線形項$\mathbf{f}(\mathbf{u})$に

(A.3)　$\ell = 1$のとき，

(2)　$\mathbf{u}(+\infty) = \mathbf{e}_-$，　$\mathbf{u}'(0) = \mathbf{0}$，
$\mathbf{e}_- \prec \mathbf{u}(r) \prec \mathbf{e}_+$　$(\forall r \in \mathbf{R}_+)$，

(3)　$\mathbf{u}'(r) \prec \mathbf{0}$　$(\forall r \in \mathbf{R}_+)$

をみたす（1）の正値解$\phi(r)$が存在する，

ことを仮定する.

古典的な２種競争系

$$f_0(\mathbf{u}) = 1 - u - cv, \qquad g_0(\mathbf{u}) = a - bu - v$$

については，$\mathbf{e}_- = (0, a)$，$\mathbf{e}_+ = (1, 0)$，

$$\hat{\mathbf{e}} = \left(\frac{1 - ac}{1 - bc}, \frac{a - b}{1 - bc}\right)$$

とおくことにより, ある$a_0 \in (1/c, b)$が存在して，各$a \in (1/c, a_0)$に対して，仮定（A.1），(A.2），(A.3）が成り立つことが知られている．つまり，仮定（A.1），(A.2），(A.3）をみたす最も単純な例は古典的な２種競争系であることが分かる．したがって，研究対象としている反応拡散系は古典的な２種競争系からの摂動として得られるものである.

本研究期間において，次の結果を得ることができた.

- 仮定（A.1），(A.2），(A.3）のもとで，区間$[1, +\infty)$上で定義された連続関数$\mathbf{u}(\cdot, \ell)$が存在して，$\mathbf{u}(\cdot, 1) = \phi(\cdot)$であり，各$\ell$に対して$\mathbf{u}(r, \ell)$は問題（1），(2)，(3）の正値解である．また，$\mathbf{w}(r)$を$\ell \geq 1$に対する問題（1），(2）の正値解とすると，$\mathbf{w}(\cdot) = \mathbf{u}(\cdot, \ell)$が成り立つ.

u と v の役割を入れ替えることにより，条件 (2)，(3) をそれぞれ条件

(4) $\mathbf{u}(+\infty)=\mathbf{e}_+$，　$\mathbf{u}'(0)=\mathbf{0}$，
$\mathbf{e}_- \prec \mathbf{u}(r) \prec \mathbf{e}_+$ （$\forall r \in \mathbf{R}_+$），

(5) $\mathbf{u}'(r) \succ \mathbf{0}$ （$\forall r \in \mathbf{R}_+$）

で置き換えることができる．

仮定 (A.1)，(A.2) のもとでは，拡散係数 e をパラメータとしたとき，二次分岐が起こったとしても，それはサドル・ノード型である．本研究では，このような二次分岐が何回起こるのかを特定することも計画していたが，未だに特定には至っておらず，今後の課題としたい．

(b) 数理モデルの解挙動

燃焼モデル方程式の解挙動や，波動伝播に対する散乱問題について研究を行った．なお，これらの研究は研究開始当初には計画されていなかったものである．

燃焼モデル方程式に対する初期境界値問題を考察し，解の時間大域的な挙動について研究を行った．特に，反応次数の総和を表すパラメータ m に着目し，m が1より大きい場合に，解が定常解へ漸近する速さを解析した．解と定常解を直接評価する従来の手法では，$O(t^{-1/2(m-1)})$ の速さで減衰することしか得られないため，空間的に一様な解を考察することとした．本研究期間において，空間的に一様な解は唯一つ存在し，定常解へ少なくとも $O(t^{-1/(m-1)})$ の速さで漸近することが示せた．また，初期値に対する解と空間的に一様な解との差を評価し，残燃料の濃度および絶対温度を表す関数の和は $O(t^{-1/(m-1)})$ の速さで減衰することも示せた．残燃料の濃度と，絶対温度を表す関数はそれぞれ同様の評価をもつと予測されるが，定常解からの摂動が十分小さい初期値に対しては，この予測が正しいことが示された．しかしながら，初期値に制限を付けない場合には，上記の結果が成り立つか不明であり，今後の課題として残されている．

無限境界をもつ領域における波動伝播に対する散乱問題を研究した．具体的には

- 帯状領域における摩擦項付き波動方程式に対する散乱解の存在証明
- 半無限領域（半空間）における弾性波動方程式に対するグリーン関数の解析

およびこれらに関する研究を行った．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Yukio Kan-on, A note on bifurcation structure of radially symmetric stationary solutions for a reaction-diffusion system III, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal., **18** (2011), no. 5, 559-568, 査読有

② Mitsuteru Kadowaki, Hideo Nakazawa and Kazuo Watanabe, On scattering for wave equations with dissipative terms in layered media, Electron. J. Diff. Equ., **2011** (2011), No. 65, pp. 1-18, 査読有

③ Yukio Kan-on, A note on bifurcation structure of radially symmetric stationary solutions for a reaction-diffusion system II, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal., **17** (2010), no. 2, 263-273, 査読有

〔学会発表〕（計６件）

① 門脇光輝，レイリー波に対するグリーン関数について，夏の作用素論シンポジウム 2012，2012/09/10，新潟大学南キャンパス

② Yukio Kan-on, Bifurcation structure of radially symmetric positive stationary solutions for a competition-diffusion system, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012/07/05, Hyatt Grand Cypress Resort, Orlando, Florida, USA

③ Yukio Kan-on, On the bifurcation structure of radially symmetric positive stationary solutions for a competition-diffusion system, The 4th MSJ-SI, Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, 2011/09/14, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine

④ 観音幸雄，２種競争系の球対称全域解について，2011 年度秋季総合分科会応用数学分科会，2011/09/30，信州大学松本キャンパス

⑤ 門脇光輝，３次元半空間の波動伝播と定常位相の方法について，解析セミナー，2011/04/22，愛媛大学城北キャンパス

⑥ 門脇光輝，Yafaev の定式化による散乱理論，新潟偏微分方程式研究集会，2010/10/10，新潟大学南キャンパス

６．研究組織

(1)研究代表者

観音　幸雄（KAN-ON YUKIO）
愛媛大学・教育学部・教授
研究者番号：00177776

(2)研究分担者

柳　重則 (YANAGI SHIGENORI)
愛媛大学・理工学研究科・准教授
研究者番号： 10253296

門脇　光輝 (KADOWAKI MITSUTERU)
愛媛大学・理工学研究科・准教授
研究者番号： 70300548