

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月7日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540139

研究課題名（和文） 有限要素外積解析の展開

研究課題名（英文） Study on finite element exterior calculus

研究代表者

土屋 卓也 (Takuya TSUCHIYA)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：00163832

研究成果の概要(和文)：任意の三角形上での関数の1次補間に関する外接半径条件を発見し、その精度保証付き数値計算を用いない（つまり伝統的な「紙と鉛筆のみ」の）証明を完成させた。その後、外接半径条件が曲面の面積の定義と密接な関係があることを見いだした。曲面がある程度の滑らかさを持ち、さらに内接多面体が外接半径条件をみたせば、内接多面体の面積は曲面の面積に収束することを示した。この定理は、有名な「Schwarz の提灯」の例を含むので、幾何学的な条件としては「best possible」である。

研究成果の概要（英文）： We have found “the circumradius condition” for linear interpolation on triangular elements. We proved it without using validated numerical computation. We then found that the circumradius condition is closely related to the definition of surface area. That is, we proved that if a surface has a certain regularity and inscribed surfaces satisfy the circumradius condition, the area of inscribed surfaces converges to that of the surface. Since the theorem can be applied to “Schwarz’ s lantern”, the theorem is “best-possible” with respect to geometry of triangulation.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	2,640,000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：1次補間、有限要素法、外接半径条件

1. 研究開始当初の背景

(1) 1968年のZlamalの論文が有限要素法の数学的基礎理論の始まりだとされているが、それ以来40年以上たち、有限要素法の基礎については全てきちんと理解されているという認識が強い。しかし申請者の認識では、

まだまだ未知の部分や理解に不十分なところがあると思われた。

(2) 通常、偏微分方程式は固定された領域上で定義され、解の近似もその領域上で行われる。領域自体が摂動を受ける場合の数学解析や数値解析はほとんど行われて以内状況で

あった。

2. 研究の目的

- (1) 有限要素法の数学的基礎について、新たな観点から見直す事を目的とした。
- (2) 有界領域が摂動を受ける場合、その領域上のラプラシアン Green 関数の変分について調べることを目的とした。さらにそれを使って、自由境界問題に対する効率的な反復解法を見いだすことも目的とした。

3. 研究の方法

- (1) 有限要素法の数学的基礎理論について、関数解析などの解析的な手法だけではなく、微分幾何学やホモロジー代数なども用いる事を試みた。
- (2) 領域の摂動に関して、Lagrange 的な見方による計算と Euler 的な見方による計算の両方について試してみた。

4. 研究成果

- (1) 3年間の間の最大の成果は、「外接半径条件」の発見であった。きっかけは一橋大学の小林健太准教授が発見した三角形上の一次補間の誤差に関する「小林の公式」であった。ある研究会で小林准教授と議論していると、「小林の公式」の主要項が三角形の外接半径（外接円の半径）の自乗であり、よって「小林の公式」の系として、
「一次補間誤差 \leq

外接半径 \times 関数の 2 階微分セミノルム」
という形の誤差評価が成り立つことが直ちにわかるという指摘を受けた。これは大変な結果だと興奮した。

しかし「小林の公式」は画期的な結果だが、証明が非常に長く、また証明の内部で精度保証付き数値計算を用いている。そこで、小林准教授と

「一次補間誤差 \leq 定数 \times 外接半径 \times 関数の 2 階微分セミノルム」

という形の評価式を精度保証付き数値計算を用いずに（つまり、伝統的な「紙と鉛筆での証明」で）示そうという共同研究を開始した。「小林の公式」およびその系は、 $p=2$ の Sobolev 空間上での結果であるが、共同研究の結果、一般の $p, 1 \leq p \leq \infty$ について上記の評価式を精度保証付き数値計算を用いずに示すことができた。この結果をまとめて、次の論文として投稿中である。

K. Kobayashi, T. Tsuchiya: A Babuska-Aziz type proof of the circumradius condition, submitted arXiv:1306.2007

証明の方針は意外と単純で、単純な変数変換

で、問題を一辺の長さが 1 の直角 2 等辺三角形上の問題に変換するという Babuska-Aziz のアイデアをそのまま用いた。ただし、単純な変数変換を 2 回組み合わせると言うところを工夫した。

さらに考察を進めて、外接半径条件が「曲面の面積の定義」と密接な関連があることを見いだした。まず、曲面の面積の定義において 1880 年代に見いだされた Schwarz と Peano の反例（いわゆる「Schwarz の提灯」）において、曲面（円柱の側面）に内接する三角形多面体の面積が、円柱の側面積に収束するための必要十分条件は、三角形の外接半径が 0 に収束することであることを確認した。さらに曲面が十分滑らかで三角形分割が外接半径条件を満たせば、内接多面体の面積が曲面の面積に収束することを示した。

また、外接半径条件が有限要素解の収束についてどの程度本質的なかを調べるために、数値実験を行った。Schwarz-Peano の反例を念頭におき、真の解が円柱の側面になるようなポアソン問題を、「Schwarz の提灯」のような三角形分割上で有限要素近似した。真の解と有限要素解の誤差を計算すると、理論的に示した結果と非常に良く一致することがわかり、外接半径条件は有限要素解の収束にとって「本質的」であることが確認できた。これらの結果は、次の論文

K. Kobayashi, T. Tsuchiya: On the circumradius condition for piecewise linear triangular elements, in preparation

にまとめて、投稿する予定である。

- (2) 有界領域が摂動を受ける場合に、領域上の（楕円型）境界値問題により定義された量がどのような変動を受けるかについて研究を行った。このような変分を Hadamard 変分という。まず、有界領域上のラプラシアンの Green 関数の領域の変動についての変分についての研究を行い、第一変分、第二変分を計算することに成功した。この結果を、「浸透問題」(filtration problem)、あるいは「ダム問題」(dam problem)と呼ばれる自由境界問題に応用した。まず、ダム問題を支配する汎関数の第一変分を計算することを試みた。最初は Lagrange 的な計算を行い、第一変分を計算することに成功した。次に、その第一変分を使って、名古屋大学の畔上教授が開発した「力法」(traction method)をダム問題に適用することを試みた。その結果、ある反復法が定義できるのだが、数値実験を行うとこの反復解法は非常に有効であることが分

かった。また、若干であるが我々が開発した反復解法に関する理論的な考察も試みた。自由境界問題に対する反復解法は数多く提案されているが、数学的な裏付けがある反復解法は、多分我々の物が始めてであるので、数学的な意義は大きいと思われる。これらの成果については、2編の論文にまとめて発表した。

さらに研究を進め、こんどはEuler的な計算を行うと、ダム問題の汎関数の第一変分が非常に簡単に求まることを発見した。この方法をさらに進めてダム問題の汎関数の第二変分を求めることができた。

最初の予定では、第一変分と第二変分を組み合わせて「Newton法的な」反復解法を定義するはずであったが、現在のところそれには成功していない。今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

(1) Nuha Loling Othman, Takashi Suzuki, Takuya Tsuchiya, A combined scheme for computing numerical solutions of a free boundary problem, International Journal of Mathematics and computers in Simulation, 5 (2011), 53--60

(2) Takashi Suzuki, Takuya Tsuchiya, Weak formulation of Hadamard variation applied to the filtration problem, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 28 (2011), 327-350, DOI: 10.1007/s13160-011-0044-y

[学会発表] (計19件)

(1) 小寺悠佑、鈴木貴、土屋卓也
一般的な領域摂動による Hadamard 変分公式
2013年3月21日 日本数学会年会 京都大学
吉田キャンパス

(2) 土屋卓也
三角形上の1次補間とその誤差解析について
2013年3月1日 第5回福島応用解析研究
集会 コラッセふくしま

(3) 小林健太、土屋卓也
外接半径条件と曲面の面積の定義との関係
について、2013年1月5日 第16回環瀬戸内
シンポジウム 愛媛大学

(4) 小林健太、土屋卓也
外接半径条件に関するいくつかの話題につ
いて 2012年12月21日 応用数学合同研究集
会 龍谷大学

(5) 土屋卓也
外接半径条件に関するいくつかの話題につ
いて 2012年11月16日 環瀬戸内ワークショ

ップ 小豆島土庄町

(6) 小林健太、土屋卓也
三角形要素上の外接半径条件について 2012
年9月21日 日本数学会秋季総合分科会 九
州大学伊都キャンパス

(7) 土屋卓也
古典的ヤコビ法の収束について 環瀬戸内ワ
ークショップ 2012年9月8日 アクロス福岡

(8) 土屋卓也
Verified Numerical Computation of the
Riemann Zeta Function 環瀬戸内ワークショ
ップ 2012年9月7日 アクロス福岡

(9) 小林健太、土屋卓也
三角形要素上の外接半径条件について 日本
応用数理学会 2012年度 年会 8月31日 稚
内全日空ホテル

(10) 土屋卓也
三角形要素上の外接半径条件について 第41
回 数値解析シンポジウム 2012年6月6日
群馬県伊香保温泉 しん喜

(11) 土屋卓也
三角形要素上の外接半径条件について、第
17回 計算工学講演会 2012年5月31日 京
都教育文化センター

(12) Takuya TSUCHIYA
The Circumradius Condition on Triangular
Elements 談話会 2012年4月2日 Institut
f"ur Zuverl"assiges Rechnen Technische
Universit"at Hamburg-Harburg

(13) 土屋卓也
有限要素法における外接半径条件について
ワークショップ「有限体積法の数学的基礎理
論の確立 II」 2012年3月15日 九州大学西
新プラザ

(14) 土屋卓也
有限要素法における外接半径条件について
ワークショップ「連続体力学の現象と数理
II」
2012年2月21日 九州大学 IMI

(15) 土屋卓也
Interpolation error on triangular
elements and its application to the finite
element analysis, 応用数学合同研究集会
2011年12月16日 龍谷大学

(16) 土屋卓也
Interpolation Error on Triangular
Elements and its Application to the Finite
Element Analysis, 日本応用数理学会 環瀬
戸内応用数理研究部会 第15回シンポジウム
2011年12月3日 山口東京理科大学(山口県
山陽小野田市)

(17) 土屋卓也
Interpolation Error on Triangular
Elements and Related Topics, 研究集会:『科
学計算の信頼性とその周辺に関するワーク
ショップ』, 2011年11月24日 西海国立公

園九十九島ビジターセンター

(18) Takuya TSUCHIYA

A weak formulation of Hadamard variation applied to a free boundary problem, 2011 Sun Yat-sen University International Conference on Frontiers of Numerical PDEs, GuangZhou, August 3, 2011

(19) 土屋 卓也

Steiner 問題に対する数値解法について、ワークショップ「連続体の現象と数理」、2011年2月23日 九州大学西新プラザ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

土屋 卓也 (Takuya TSUCHIYA)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：00163832

(2) 研究分担者

鈴木 貴 (Takashi SUZUKI)

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：40114516