

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 26 日現在

機関番号：32606

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540140

研究課題名(和文) ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計

研究課題名(英文) Level Statistics for Random Schroedinger Operators

研究代表者

中野 史彦 (Nakano, Fumihiko)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：10291246

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円、(間接経費) 750,000円

研究成果の概要(和文)：空間遠方で減衰するランダムポテンシャルを持つ1次元のシュレーディンガー作用素の有界区間上への制限の固有値をスケールリングして得られる点過程の、無限体積極限を調べた。結果：(i) 減衰が速いとき：点過程はclock processに収束し、Second order はガウス過程に収束する、(ii) 臨界オーダーのとき：点過程の極限は circular beta ensemble のスケールリング極限と一致する。更に、この極限は Gaussian beta ensemble のスケールリング極限とも一致し、その系として、この2つの beta ensemble のスケールリング極限は一致する。

研究成果の概要(英文)：We study the level statistics problem for 1-dimensional Schroedinger operators with random decaying potential. That is, we restrict our Hamiltonian on a bounded interval, consider a point process composed of the rescaled eigenvalues of this truncated Hamiltonian, and then study its infinite volume limit. The result is : (i) rapid decay case : the point process converges to the clock process, and second order asymptotics converges to Gaussian, (ii) critical decay case : the point process converges to that of the circular beta ensemble, as well as that of the Gaussian beta ensemble, thus yielding the coincidence of these two processes as a corollary.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：ランダムシュレーディンガー作用素 準位統計 ランダム行列

1. 研究開始当初の背景

(1) ランダムなポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素はスペクトルのある領域において、固有値が稠密に分布し、スペクトルは連続成分を持たず、対応する固有関数は遠方において指数的に減少するという特徴を持ち、アンダーソン局在と呼ばれている。これは物性物理学において主要な研究テーマの一つであるが、数学的研究は古くから行われているものの、物理の研究者たちの間でコンセンサスが得られていることと、数学で厳密に証明されていることとの間にはギャップが存在するのが現状である。特に、連続スペクトルの存在は、ランダムポテンシャルの影響下でも量子力学的粒子が局在しないことに対応し、その証明がなされていない。

(2) ランダムなエネルギー準位の分布を調べる、いわゆる準位統計の問題については、アンダーソン局在下においてその固有値の分布はポアソン過程に従うことが証明されている。しかし、連続スペクトルのエネルギー領域において、エネルギー準位はランダム行列理論で記述されることが物理の研究者によって予想されているものの、数学的研究は殆どなかった。

(3) 最近、Killip-Stoiciu は CMV 行列の理論を用いることにより、ランダム行列理論に現れる circular beta ensemble のスケールリング極限をある特異な係数を持つ確率微分方程式を用いて記述した。一方で、ほぼ同時期に Valko-Virag は Gaussian beta ensemble のスケールリング極限を Killip - Stoiciu のと類似の確率微分方程式を用いて記述した。

2. 研究の目的

(1) 遠方で減衰するランダムポテンシャルを持つ 1 次元シュレーディンガー作用素において、それを有限区間に制限して得られる作用素の固有値のなす点過程を、レファレンスエネルギーと呼ばれるスペクトル上の任意の点  $E$  の近傍で考え、この点過程の体積無限大極限でのスケールリング極限を調べる。これは  $E$  付近に分布する固有値の確率法則を調べることに対応する。この作用素のスペクトルはポテンシャルの遠方での減衰のオーダーに応じて次の 3 通りに分けられる。

- (i) 減衰が遅いとき：点スペクトル、
- (ii) 減衰が速いとき：絶対連続スペクトル
- (iii) 臨界オーダーのとき：あるエネルギー  $E_c$  よりも小さい領域では点スペクトル、 $E_c$  よりも大きい領域では特異連続スペクトル、

$E$  がそれぞれの領域にある場合に、点過程の極限がどのように変化するかを調べる。

(2) 有界区間上の 1 次元ランダムシュレーデ

ィンガー作用素であるが、そのポテンシャルの係数が区間の長さとともに減衰するようなものを考え、(1)と同様の問題を考える。このモデルにおいても減衰オーダーにより点過程の極限に質的な相違が出てくるものと予想される。

3. 研究の方法

シュレーディンガー方程式の解をプリューファー座標を用いて表したとき、問題の点過程のラプラス変換はその角度部分の、エネルギーを変えたときのずれを用いて表現できる。このずれをスケールリングしてその挙動をマルチンゲール解析を用いて調べ、その族がタイトであることを示し、その集積点を確率微分方程式の解として特徴付ける。次にプリューファー座標の角度部分をトーラスに射影したもののスケールリング極限を同様にして特徴付けて、両者の独立性を示す。

4. 研究成果

(1) スペクトルの構造はポテンシャルの減衰オーダーに応じて (i), (ii), (iii) に分けられたが、(ii), (iii) の場合について、点過程の極限が次のように求められた。

(ii) のとき：点過程は clock process と呼ばれる、間隔は決定的であるが、その重心がランダムであるような点過程に分布の意味で収束する。また、第 2 オーダーでの揺らぎはガウス過程に収束することがわかる。

(iii) のとき：プリューファー座標の角度部分の「ずれ」に相当する量のスケールリング極限は確率微分方程式の解を用いて特徴付けできる。これが Killip - Stoiciu の求めた記述と同値であることを証明することにより、この点過程の極限は circular beta ensemble のそれと一致することがわかった。

さらに、この極限が Valko - Virag の求めた Gaussian beta ensemble の極限とも一致することが証明できた。この結果の系として、circular beta ensemble のスケールリング極限と Gaussian beta ensemble のそれとが一致することがわかった。

このとき、対応する  $\beta$  の値はレファレンスエネルギー  $E$  に依存するのだが、 $E < E_c$  ならば、 $\beta < 2$ 、 $E > E_c$  ならば  $\beta > 2$ 、 $E = E_c$  ならば、 $\beta = 2$  となることがわかった。この対応関係は、1 次元格子上的シュレーディンガー作用素、CMV matrices, tridiagonal random matrices などでも確認されており、かなり普遍的な現象であると思われる。 $\beta = 2$  のときの Gaussian ensemble 及び circular beta ensemble は様々な特徴を持っていることが知られているが、それがエネルギーの転移点  $E_c$  において実現されることは大変興味深い。また、 $\beta = 2$  の前後でそのスケールリング極限に

一種の相転移が起こることが Valko - Virag によって示されている。一方、物理の研究者により議論されているユニバーサリティークラスの理論によれば、この系では  $\beta = 1$  であるはずなので、この結果は物理の予想に反していることになる。

(2) やはり(ii), (iii) の場合について、点過程の極限が次のように求められた。

(ii)のとき:点過程は決定的な clock process と呼ばれるものに収束し、第2オーダーでの揺らぎは(1)よりもより相関の弱いガウス過程に収束する。

(iii)のとき:(1)と同様に確率微分方程式を用いてラプラス変換を表現することができる。但し、アンサンブルのスケーリング極限とはかなり異なる性質を持っていることがわかる。例えば、準位間の反発は(1)より強い。

(1), (2) とともに、(i) ポテンシャルの減衰オーダーが小さいときの点過程の極限を求めることができなかった。それは、微小区間の中に固有値が2つ以上存在する確率の評価の困難さに起因する。これは次年度以降の課題である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

[1] Fumihiko Nakano, Hiroataka Ono and Taizo Sadahiro  
Connectedness of domino tilings with diagonal impurities, Disc. Math., Vol. 310 (2010), p. 1918-1931.

[2] Fumihiko Nakano and Taizo Sadahiro  
A bijection theorem for domino tiling with diagonal impurities, J. Stat. Phys., Vol. 139, No. 4 (2010), p. 565-597.

[3] Fumihiko Nakano and Taizo Sadahiro  
A  $(-\beta)$ -expansion associated to Sturmian sequences, Integers, Vol. 12 No. 4 (2012), p. 571-600.

[4] Fumihiko Nakano and Taizo Sadahiro  
Domino tilings with diagonal impurities, Fundamenta, Informaticae, Vol. 117 (2012) 249-264.

[5] Fumihiko Nakano and Taizo Sadahiro,  
Hitting matrix and domino tiling with diagonal impurities, J. Stat. Phys. Vol. 151, No. 6 (2013),

p. 1035-1055.

[6] Shinichi Kotani and Fumihiko Nakano  
On the level statistics problem for the one-dimensional Schroedinger operator with random decaying potential, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B45 (2014), 19 - 24.

[7] Fumihiko Nakano and Taizo Sadahiro  
A generalization of carries process and Eulerian numbers, Advances in Applied Mathematics, Vol. 53 (2014) 28 - 43

[8] Shinichi Kotani and Fumihiko Nakano  
Level statistics for the one-dimensional Schroedinger operators with random decaying potential, to appear in Festschrift Masatoshi Fukushima

[9] Fumihiko Nakano and Taizo Sadahiro  
A generalization of carries process, to appear in the Proceeding of FPSAC 2014. (Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceeding Volume)

[10] Fumihiko Nakano  
Level statistics for one-dimensional Schroedinger operators and Gaussian beta ensemble, J. Stat. Phys.にて掲載決定

[学会発表](計40件)

2010年

[1] 5月15日

「ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計について」  
(スペクトル理論セミナー、学習院大学)

[2] 5月30日～6月4日

“A remark on the discrete Schroedinger operators with random vector potential”  
 (“Random Schroedinger Operators”  
 EPFL Lausanne, 招待講演)

[3] 6月21日～23日

“On a beta expansion with negative bases”  
 (“Mathematics of Quasiperiodic Order”, 京都大学数理解析研究所)

[4] 7月20日

「不純物を含むダイマーモデルについて」  
(談話会、学習院大学)

[5] 8月26日～29日

「高次元格子でのアンダーソン局在」

(サマースクール数理物理、東京大学数理学研究科)

[6] 9月7日~10日  
「ダイマーモデルの基本的性質」  
(集中講義、高知大学)

[7] 9月7日  
「不純物を持つダイマーモデルについて」  
(談話会、高知大学)

[8] 11月4日~6日  
“Distribution of eigenfunctions in the Anderson model”  
 (“Journées Mathématiques de Kairouan”, チュニジア、招待講演)

[9] 12月16日~18日  
「不純物を含むダイマーモデルについて」  
(応用数学合同研究集会、龍谷大学)

2011年

[10] 1月22日  
“Infinite divisibility of random measures for some random Schroedinger operators”  
(神楽坂セミナー、東京理科大学)

[11] 2月21日  
“Domino tilings with impurities”,  
 (“Analysis on Graphs in Sendai 2010”, 東北大学)

[12] 2月21日~23日  
“Infinite divisibility of random measures for some random Schroedinger operators”,  
(北東数学研究集会、東北大学)

[13] 3月21日  
“Domino tiling with impurities”  
(Seminar, Univ. Paris 13)

[14] 7月8日  
「1次元ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計について」  
(解析セミナー、愛媛大学)

[15] 7月25日~27日  
「ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計について」  
(「微分方程式に対する幾何解析の展望」, 京都大学数理解析研究所)

[16] 9月28日~10月1日  
「不純物を含むダイマーモデルについて」  
(日本数学会特別講演、信州大学)

[17] 11月12日~11月14日  
「1次元ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計について」  
(「微分方程式と数理物理」, ヒルズサンピア山形)

[18] 11月24日  
「不純物を含むダイマーモデルについて」  
(談話会、鹿児島大学)

[19] 12月1日~3日  
「1次元ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計について」  
(「ランダム作用素のスペクトルと関連する話題」, 京都大学)

[20] 12月14日~16日  
「1次元ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計について」  
(「スペクトル散乱理論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所)

[21] 12月20日~22日  
「不純物を含むダイマーモデルについて」  
(「自己相似タイリングの剛性定理とその周辺」, 京都大学数理解析研究所)

[22] 12月27日~30日  
“Dimer model with diagonal impurities”  
 (“Fractal Geometry and Ergodic Theory”, Morningside Center, Beijing, China, 招待講演)

2012年

[23] 3月10日  
「1次元ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計について」  
(応用解析セミナー、熊本大学)

[24] 5月19日  
「Kenyon-Wilson 理論とその応用について」(東京力学系セミナー、文京学院大学)

[25] 5月28日~30日  
“The level statistics of one-dimensional Schroedinger operator with random decaying potential”  
 (“Mathematics of quantum disordered systems”, Univ.Paris13, 招待講演)

[26] 6月13日~15日  
「1次元ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計について」  
(「幾何学的偏微分方程式に対する保存則と正則性特異性の研究」, 京都大学数理解析研究所)

[27] 6月25日~29日

「エルゴード的シュレーディンガー作用素のスペクトル理論」  
(集中講義、新潟大学)

[28] 7月26日

「Kenyon-Wilson 理論とダイマーモデルへの応用」  
(CREST セミナー、東北大学)

[29] 11月3日～5日

「1次元ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計について」  
(「微分方程式と数理物理」, 国民宿舎野呂高原ロッジ)

[30] 12月5日～7日

「1次元ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計について」  
(「ランダム作用素とその周辺」, 京都大学)

[31] 12月18日～19日

「不純物を含むダイマーモデルについて」  
(「置換行列の数理科学」, 琉球大学)

[32] 12月20日～22日

“Carry Process and Amazing Matrix”  
(応用数学合同シンポジウム、龍谷大学)

2013年

[33] 1月21日～25日

「Thomas-Fermi 理論入門」  
(集中講義、信州大学)

[34] 2月12日～15日

“A generalization of carries process”  
(“Markov chains on graphs and related topics”, 京都大学数理解析研究所、招待講演)

[35] 6月10日

「1次元ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計について」  
(東京確率論セミナー、東京工業大学)

[36] 9月10日～13日

“The level statistics for one-dimensional Schroedinger operator”  
(QMath 12, フンボルト大学、ベルリン)

[37] 9月14日

“A generalization of carries process”  
(“Geometric aspects in probability and analysis”, Jena)

[38] 9月17日～19日

“A generalization of carries process”  
(「タイル張り力学系とその周辺」, 京都大学数理解析研究所)

[39] 12月5日～7日

“The level statistics for one-dimensional Schroedinger operator”  
(“Random operators and related topics”, 京都大学)

[40] 12月25日～28日

“The level statistics for one-dimensional Schroedinger operator”  
(“Sino-Japanese workshop on Fractals and Dynamical Systems”, Morningside Center of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, 招待講演)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者  
中野史彦 (NAKANO, Fumihiko)  
学習院大学・理学部・教授  
研究者番号: 10291246

(2)研究分担者  
該当者なし

(3)連携研究者  
南就将 (MINAMI, Nariyuki)  
慶応大学・医学部・教授  
研究者番号: 10183964

上木直昌 (UEKI, Naomasa)  
京都大学・人間環境学研究所・教授  
研究者番号: 80211069

貞廣泰造 (SADAHIRO, Taizo)  
津田塾大学・学芸学部・准教授  
研究者番号: 00280454