様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月２５日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010 ～ 2012
課題番号：22540143
研究課題名（和文）
二流体問題の新しい数値解法の開発と解析
研究課題名（英文）
Development and analysis of new numerical methods for two-fluid problems
研究代表者
田端　正久　（TABATA　MASAHISA）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：30093272

研究成果の概要（和文）：
気液二相流など，複数の流体が併存する二流体問題のための，新しい数値解法を開発した．この解法は，単一流体問題で確立された数学理論に基づいていること，任意形状領域に適用できること，流体界面で働く力が考慮されていること，対称行列のみの計算でコストが軽減であることの特長を持っている．このスキームを用いて，砂時計形状領域で密度の異なる二流体の挙動を数値シミュレーションし，分離と併合を実現する結果を得た．

研究成果の概要（英文）：
A new numerical scheme has been developed for two-fluid problems such as gas-liquid two-phase flows, where multiple fluids coexist. This scheme is based on the mathematical theory established in the single-fluid problem, is applicable to problems in the domain of any shape and subject to the force at the interface of fluids, and has the advantage of low computation cost since the resultant linear system is symmetric. Simulating the movement of two fluids with different densities in a container of hourglass shape by this scheme, we have realized numerically the phenomena of splitting and merging of fluids.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：応用数学，モデル化，二流体問題，数値解析，特性曲線有限要素法

１．研究開始当初の背景

ナヴィエ・ストークス方程式で記述される非圧縮粘性流れ問題に対する数値解法の数学的正当化は，Girault-Raviart[1986], Brezzi-Fortin[1991]などの体系化された書物を経て，有限要素法で確立され，その結果は工学的実用計算に用いられている．高レイノルズ数流れ問題や大規模計算への対応など課題は残っているが，単一流体問題に関しては信頼ある数値計算結果を得ることができるようになった．一方，気液二相流など複数の流体の数値計算は産業界の必要性があり，数多くの数値シミュレーションが国内外でなされているが，数学的に正当化された数値計算手法はまだ得られていない．

二流体問題に対する数値解法の正当性，すなわち，計算スキームの安定性と数値解の収束性に関して，現在得られている結果は非常に限られている．その原因は二流体問題が単一流体問題にはない二つの難しさを持っているからである．すなわち，それぞれの流体が占める領域自身が未知であることと，二つの流体界面でその曲率に応じた表面張力が働くことである．そのため，数値解の収束性の結果はまだ得られていない．計算スキームの安定性に関しては，Bansch[2001]の結果と，2007 年に研究代表者によって得られた結果があるのみである．前者の数値計算法は複雑であり，実用計算に取り入れることは容易でないが，後者の結果はエネルギーの意味で安定性を考慮したもので，実際の計算に向いている．この後者の数値計算スキームが本研究の出発点である．

流体が占める未知領域を安定に計算する方法を構成することは容易でなかったが，上記の論文で我々は，全領域を解析領域とし界面位置のみを移動する計算手法を採用し，表面張力の計算には有限要素法で自然に用いることができる弱形式を取り入れることにより，全領域でエネルギー安定性を調べることができるスキームを作成することに成功した．この手法は界面追跡法に分類される数値解法であり，数値拡散の影響を受けることなく，界面位置を鮮明に捉える事ができる特長を持っている．このスキームではナヴィエ・ストークス方程式の非線形項の近似に，歪称性構造の三重形式を用いている．一方，研究代表者は，流れ問題の物質微分項を特性曲線法で近似する特性曲線有限要素法の研究も行っている．この手法は，高レイノルズ数問題に有効であり，元の問題が非対称であるに関わらず対称行列の範囲で計算できる特長を持っている．この方法を二流体問題に取り入れれば粘性が小さい問題でも，より安定に解けると同時に，計算速度の向上を図ることができる．表面張力は流体の占める領域形状に依存しているので，二流体問題では陰的解法であっても時間刻みを小さく取らざるを得ない．したがって，計算量が増大することは避けられない．その各段階で対称行列の範囲で問題が解けることは，計算量を大きく軽減化するものである．

２．研究の目的

(1) 二流体問題のための，数学的に正当化された新しい数値解法を開発すること．
(2) 開発した数値解法の数学的特性を調べ，その解析を行うこと．
(3) 開発した数値解法を用いて二流体問題の数値シミュレーションを行うこと．

３．研究の方法

(1) 研究代表者が 2007 年に発表したエネルギー安定有限要素スキームを，高レイノルズ数の場合でも有効に計算できるために，ナヴィエ・ストークス方程式の非線形移流項を特性曲線有限要素法

を用いて近似する新しいスキームを作成する．

⑵ この新しい計算スキームのエネルギー安定性を理論と数値計算の両面から解析する．理論解析では，従来のエネルギー安定有限要素スキームで開発した方法を特性曲線有限要素法に拡張して，新たに現れる項の評価を行う．

⑶ 数値計算を，新規に購入する高性能パーソナル･コンピュータで行いスキームの特性を捉え，理論へのフィードバックと理論結果の検証を行う．

⑷ 新しいスキームで気泡上昇問題等の二流体問題の数値シミュレーションを行う．

⑸ 数値解の収束性について理論と計算の両面から解析する．さらに，流体の併合，分離を伴う問題へ計算スキームの拡張を行う．

４．研究成果

⑴ 研究代表者が 2007 年に発表したエネルギー安定有限要素法を用いて，砂時計形状領域で密度の異なる二流体の挙動を詳細に数値シミュレーションした．容器境界で滑り境界条件と粘着境界条件の違いによる挙動への影響，エネルギーの時間推移，落下流体の重心の時間推移を観測解析した．

⑵ エネルギー安定有限要素スキームを高レイノルズ数の二流体問題に適用するために，特性曲線有限要素近似を物質微分項に用いる新しいガレルキン特性曲線有限要素スキームを作成した．特性曲線近似法は流体粒子の軌跡の近似に基づく数値解法であり，高レイノルズ数流れ問題でも細かい分割を必要としない特長を持っている．さらに，対称行列の範囲で問題を解くことができるので，二流体問題計算の主要部分を占める大規模連立一次方程式の解法に要する時間を短縮することができた．

⑶ この新しい計算スキームのエネルギー安定性を理論と数値計算の両面から解析した．理論解析では，従来のエネルギー安定有限要素スキームで開発した方法を特性曲線有限要素法に拡張して，特性曲線法で新たに現れる項の評価を行った．その結果，エネルギーの意味で安定性が，界面上で近似曲率の自乗積分量で評価できることを示した．

⑷ 流体の分離・併合を取り扱うことができるように，スキームの改良を行った．その結果，砂時計形状領域を占める密度の異なる二流体の挙動の数値計算で，多数回の分離と併合を実現するシミュレーション結果を得ることができた．レベルセット法を用いて界面捕獲法に基づく数値計算では，このような流体の分離と併合を取り扱うことは比較的容易であるが界面位置の計算精度が落ちる．切り口に使われるレベルセット関数が要素分割の精度しか持たないからである．一方，我々の方法は界面追跡法に基づいているので，分離や併合など流体の位相変化を伴う計算をするにはプログラミング上の高度のテクニックが要るが，界面位置と表面張力の計算精度はレベルセット法より大きく向上した．

⑸ 流体の分離・併合のアルゴリズムをよりロバストなものに改良した．その結果，界面位置が精度良く計算できる界面追跡法の特長を維持しつつ，分離や併合など流体形状の大きな位相変化に，より適切に対応できるようになった．

砂時計形状のくびれた領域で，密度の異なる二流体が混じり合い，分離併合を繰り返して落下するシミュレーション結果を得ることができた．

(6) この研究に関連して得られた成果．

① 質量保存性を維持した特性曲線有限要素スキームを開発し，移流拡散方程式に対して収束性を証明した．

② 集中質量近似を用いるガレルキン特性有限要素スキームを作成した．このスキームでは，従来特性曲線法で必要とされてきた数値積分を用いることなく計算を実行することが可能であり，移流拡散方程式に対して収束性を証明した．

③ 数値積分を必要としない特性曲線差分スキームを開発し，移流拡散方程式に対して２乗積分平均ノルムで収束性を証明した．数値積分誤差から引き起こされる不安定性を解消する一つの方法である．

④ 領域分割法を用いて数値計算をする際に強型ロビン境界条件の下での有限要素解の挙動を調べた．

⑤ 差分法で特性曲線近似を行う際に非格子点を使って近似を行うことが必要になるが，その近似の特性と評価を行った．

⑥ 風上要素選択有限要素法と集中質量近似を用いた特性曲線有限要素法がある条件の下で同等になることを示した．

(7) これらの研究成果は，ロシア・サンクトペテルブルグでの第６回計算流体力学国際会議(2010.7)，ドイツ・ミュンヘンでの第 16 回流れ問題有限要素法に関する国際会議(2011.3)，ヴェトナム・ハノイでの第５回高性能科学計算に関する国際会議(2012.3)等で，また，国内では，日本数学会，応用数理学会，数値流体力学シンポジウム等で毎年，発表した．これらの発表でこの数値解法の新しいアイデアと理論的整合性，計算の簡潔さが注目された．

(8) 現在のスキームは 2 次元用であるので，3 次元問題に対応したスキームを作成することが今後の課題である．定式化で 2 次元，3 次元の違いはほとんどないが，プログラムの実装において計算効率を上げる新たな工夫を加える．二流体問題のための数学的に正当な，かつ，実用的な計算スキームが得られることの意義は大きい．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）

[1] H. Notsu, H. Rui, and <u>M. Tabata</u>. Development and L2-analysis of a single-step characteristics finite difference scheme of second order in time for convection-diffusion problems, Journal of Algorithms and Computational Technology,　掲載決定．（査読有）

[2] <u>M. Tabata</u>. Behavior of finite element solutions subject to strong-type Robin conditions. COE Lecture Note, Vol. 45, pp.1-15, Institute of Mathematics for Industry, Kyushu Univ., 2013（査読無）

[3]<u>田端正久</u>，野津裕史．非格子点関数値を要する有限差分近似．日本応用数理学会論文誌, Vol. 22, pp.171-179, 2012.（査読有）

[4] <u>M. Tabata</u>. Quadrature-free characteristic methods for convection-diffusion problems. Proceedings of the Eighth International Conference on Engineering

Computational Technology, B. H. V. Topping, editor, Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotlan, pp.1801-1812 , 2012. （査読無）

[5] O. Pironneau and M. Tabata. Stability and convergence of a Galerkin-characteristics finite element scheme of lumped mass type. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 64, pp. 1240-1253, 2010.（査読有）

[6] M. Tabata. Numerical simulation of fluid movement in an hourglass by an energy-stable finite element scheme. In M. N. Hafez, K. Oshima, and D. Kwak, editors, Computational Fluid Dynamics Review 2010, pp. 29-50. World Scientific, Singapore, 2010.（査読無）

[7] Y. Mizuyama, T. Shinde, M. Tabata, and D. Tagami. Finite element computation for scattering problems of micro-hologram using DtN map. JSIAM Letters, Vol. 2, pp. 45-48, 2010.（査読有）

[8] H. Rui and M. Tabata. A mass-conservative characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. Journal of Scientific Computing, Vol. 43, pp. 416-432, 2010.（査読有）

〔学会発表〕（計 21 件）

[1] M.Tabata. Quadrature-free characteristic methods for convection-diffusion problems. The 8th International Conference on Engineering Computational Technology, Hotel Dubrovnik Palace, Dubrovnik, Croatia (2012.09.05) .

[2] M. Tabata. Galerkin-characteristics finite element methods - theory and applications. Workshop on Modeling, optimization and simulation of complex fluid flow, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Germany (2012.06.20).

[3] M. Tabata, Quadrature-free characteristics methods for convection-diffusion terms, International Workshop on Computational Science and Numerical Analysis, The University of Electro-Communications, Chofu, Tokyo (2012.03.24).

[4] M. Tabata, Numerical simulations of two-fluid flow problems by a Galerkin-characteristics finite element scheme, 5th International Conference on High Performance Scientific Computing - Modelling, Simulation and Optimization of Complex Processes, Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam (2012.03.09).

[5] M. Tabata, Galerkin-characteristics finite element methods for flow problems, 1st International Conference on Numerical Analysis & Optimization - Theory and Applications, King Fahd University of Petroleum & Minerals, Dhahran, Kingdom of Saudi Arabia (2011.12.18).

[6] 田端 正久，数値シミュレーションへの誘い，日本数学会 2011 年度秋季総合分科会市民講演会，松本中央公民館，松本 (2011.10.01).

[7] M. Tabata, Galerkin-characteristics finite element approximation and its application to two-fluid flow problems, 7th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Vancouver Convention Centre, Vancouver, Canada (2011.7.20).

[8] M. Tabata. Energy-stable Galerkin-

characteristics finite element approximation to two-fluid flow problems, 16th International Conference on Finite Elements in Flow Problems, Munick, Germany (2011.3.23).

[9] M. Tabata. Finite element characteristic methods for two-fluid flow problems. The 3rd China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics. Gangneung-Wonju National University, Korea (2010.8.19).

[10] M. Tabata. Energy-stable Galerkin-characteristics finite element approximation to multi-fluid flow problems. The 6th International Conferenc on Computational Fluid Dynamics. St. Petersburg, Russia (2010.7.14).

〔図書〕（計３件）

[1] 田端正久．応用数理ハンドブック．薩摩順吉，大石進一，杉原正顕（編），朝倉書店，印刷中,分担執筆，計８頁．

[2] A. Suzuki and M. Tabata. Domain Decomposition Methods: Algorithms and Practice. Civil-Comp Press, Edinburgh, 2010, pp. 229-266. F. Magoules, editor の Chapter 9:Finite element matrices in congruent subdomains and some techniques for practical problems を執筆

[3] 田端正久．偏微分方程式の数値解析．岩波書店，東京，2010，144 頁．

〔その他〕

平成 23 年 9 月 26 日付け長野 MSN 産経ニュース．

見出し：来月１日，松本で日本数学会講演会 長野．

記事内容：日本数学会 2011 年度秋季総合分科会の市民講演会が松本市の中央公民館で開催され，早稲田大学理工学術院の田端正久氏が「数値シミュレーションへの誘い」と題して講演する．

６．研究組織

(1)研究代表者

田端　正久（TABATA MASAHISA）

早稲田大学理工学術院・教授

研究者番号：30093272