

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 4 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540144

研究課題名(和文) 動的計画法におけるベルマン方程式の包括的研究と数理経済学への応用

研究課題名(英文) An inclusive study of Bellman equation in dynamic programming and applications to mathematical economics

研究代表者

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi)

九州大学・経済学研究科(研究院)・名誉教授

研究者番号：90037284

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では動的計画法の核心をなすベルマン方程式を解析的に解き、背景となる動的最適化問題の最適解を閉じた型で表わした。これと同時に、所与の(主)ベルマン方程式に対してその双対ベルマン方程式を新たに導入し、両方程式の解を求め、元の動的最適化問題の最適構造を方程式の双対関係によって明らかにした。また、経済動学における経済成長モデルにこの双対理論を適用した。本研究によって解析解をもつ動的最適化問題群の存在が明らかになり、そこに動的最適化の双対理論——「動的双対」——を展開できることが判明した。

研究成果の概要(英文)：This research investigates an analytic solution of Bellman equation in dynamic programming and applies it to mathematical economics. The Bellman equation governs an optimal behavior of an associated dynamic optimization problem. A desired optimal solution of the optimization problem is characterized through optimal solution of the Bellman equation, which consists of a pair of optimal policy and optimal value function. We derive a dual equation from a given (primal) Bellman equation, which yields a dual dynamic optimization problem of a given (primal) problem. Optimal solutions of the two problems are obtained by solving the corresponding Bellman equations. The dual theory is applied to economic growth model in economic dynamics.

研究分野：計画数学、動的計画法

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：動的計画法 ベルマン方程式 双対方程式 双対最適化問題 動的双対

1. 研究開始当初の背景

- (1) 本研究では動的計画法 (dynamic programming, DP) の核心をなすベルマン方程式 (Bellman equation, BE) の解析解 (analytic solution) を求める。この解は次元の呪い (curse of dimensionality) ゆえ、求め難いといわれている。解を所与のデータだけで表わすことはできないだろうか。このような閉じた型で求められる動的最適化問題の族はどのような問題群であろうか。
- (2) 線形計画、2 次計画、凸計画などの数理計画法では双対理論がよく研究され、応用されている。しかし DP ではその双対性は現在まで研究されていない。DP の双対はどのようになるのであろうか。
- (3) 線形計画においては最適解の双対関係は相補余裕性を含めて、極めて鮮やかであるが、DP における最適解 (最適値関数列と最適政策) の相互関係はどのようになるのであろうか。
- (4) 数理経済学における経済成長モデルは既に研究されて久しい。これは動的最適化問題と考えられる。しかしこの双対モデルもほとんど議論されていないようである。
- (5) 理工学・OR などにおける動的最適化問題の多くはその最適解は近似解であったり数値解であったりである。これらの問題全般に対してその最適解を閉じた型で求めることはできないだろうか。さらにはそこには双対問題が展開出来ないだろうか。
- (6) DP は時間を含む最適化問題の解を求める手法であり、20 世紀の名著といわれている R. Bellman 著 „Dynamic Programming,” Princeton Univ. Press, 1957 年、にさかのぼる。以来、理工学・経済学をはじめ科学・技術の諸分野において基礎的分析ツールとして用いられている。

2. 研究の目的

- (1) 過去 30 数年間における DP 研究においては 4 つの型 —— ① 確定的、② 確率的、③ ファジィ、④ 非決定性 —— に分けて理論と応用の研究を行い、近年では主に 2 つのベルマン方程式 —— ① 制御積分方程式、② 制御微分/差分方程式 —— の最適解を求めてきた。この過程で解の表わし方に着目するようになり、DP の解には種々の表現があり、問題に含まれるデータ (パラメータ) で明快に表わされる場合は極めてすくなく、たいていは近似解か数値解であることに強い衝撃を受けた。本研究ではこの真逆である解析解

(analytic solution) を求めようと志向するようになった。同時に、所与の (主) 問題 (primal problem) にはその双対問題 (dual problem) が対応するのではないかと思うようになった。本研究では DP 問題全般を包括してその最適解を閉じた型で求め、同時に双対問題を抽出・表現することに絞った。

- (2) 研究代表者の単著『動的計画論』(1987 年、九大出版) では「最適化の三面鏡 (逆・反転・双対)」の理論と応用を述べた。ここでは逆理論と反転理論を詳細に検討した。しかし双対理論については完全に詳細を述べるには至らなかった。この間四半世紀にわたって絶えず動的最適化問題を解いて来た。最近、「双対理論」を新たに深く極める動的最適化問題をつかまえることができた。それはフィボナッチ最適解、黄金最適解をもつ問題である。この問題は制御工学から派生した最適化問題であり、実は『動的計画論』で「逆と反転」の視点から論じられている。本研究では、特に視点を「双対」に当てて、その理論と応用を再検討することを目的にした。

- (3) 交付申請時にはなかった目的ではあるが、研究途中で最適解のゼロ和、単位和などの新たな性質に着目するようになった。この最適解の性質を研究するテーマとして『パラメトリック分数計画』も研究目標に追加した。これが本来のテーマである『解析解と双対化』とどのような関係になるかも観てみたい。

3. 研究の方法

- (1) これまで解いてきた動的最適化問題の全体は膨大な量になっている。まずこれらを冷静に見直すことから始める。その全体を ① 解析解をもつ問題群 と ② そうでない問題群 に大別する。前者①をさらに (a) 双対問題をもつ問題群 と (b) そうでない群 に分ける。この段階で種々の思考錯誤をめぐらす。

- (2) ある「極めて簡単な 2 変数問題」では主も双対も解析解をもち、双対化可能であることがわかっている。これを出発点にして、問題の解析を徹底的に行い、解析解が求められる仕組みと双対化可能な構造を探る。すなわち、この問題の「仲間」を増やして行く。ここでは 3 変数化、n 変数化、無限変数化、連続変数化など多様な試みを行う。

- (3) 既存の三面鏡理論 (逆理論・反転理論・双対理論) を洗い直してみる。これは上記の単著『動的計画論』をはじめ、R. Bellman の多くの著作・論文を点検することにもなる。またここでは既存の双対定理の全体像をまとめることになる。いわゆる双対定理は「制約条件下」でなりたっているが、「制約条件なし」の数理計画問題の双対化という視点で考えると、どのようになるか試行錯誤する。

#### 4. 研究成果

(1) いわゆる黄金分割は黄金比  $1 : 1.618$  に基づく1回限りの分割である。ただしここでは簡単のために  $1.618$  は黄金数を表わすものとする。これに対し分割を繰り返す「逐次分割」を新たに考え、逐次分割に①フィボナッチ、と②黄金、の2つを導入した。さらに①フィボナッチ分割を46(ヨンロク)型と64(ロクヨン)型に分けた。前者はフィボナッチ比  $4 : 6$  による分割の繰り返しである。後者は  $6 : 4$  の繰り返しである。また、この極限形として②黄金分割に  $1 : 1.618$  型と  $1.618 : 1$  型を導入した。2つのフィボナッチ分割が最適になる有限変数2次計画問題を与え、その双対問題との間に「フィボナッチ相補性」と「フィボナッチシフト性」がそれぞれ成り立つことを示した。この結果を映画「ダ・ヴィンチ・コード」(2006年)に適用して、ダ・ヴィンチ・コード(暗号)(すなわち最初の8つのフィボナッチ数列)が最適になる2つの問題を明示して、「フィボナッチ相補性」と「フィボナッチシフト性」の具体例を明示した。したがって、この問題の最適解がダ・ヴィンチ・コードであり、双対性が2つ成り立つことがわかった。さらに無限変数では2つの黄金分割が最適になり、双対問題との間に「黄金相補性」と「黄金シフト性」が成立することがわかった。

(2) (1)の解析過程で、従来のリュカの公式に加えて、新たに「2連続和」の公式が得られた。この公式はリュカの公式と共に相補性・シフト性・最適性・双対性などを導くのに極めて重要な役割を果たしている。この和の公式を発展させて(a)フィボナッチ数の和、と(b)黄金数の和、として一連の公式を得た。これは本研究の予想外の成果である。

(3) (1)の成果の「交互版」を新たに導入し、(a)交互フィボナッチ相補双対性、と(b)交互フィボナッチシフト双対性、を導き、ダ・ヴィンチ・コードに適用した。これによって、本研究の対象となる目的関数の範囲が2倍に拡大したことになる。また、本研究によって「ダ・ヴィンチ・コード」を(a)46(ヨンロク)型と64(ロクヨン)型、と(b)正規型と交互型に分けた。

(4) 経済成長など経済システムの最適化問題を解析する過程で極めて特徴的な性質が判明した。それは最適値関数と最適政策の間の①ゼロ和、②定和、③単位和、などである。これは最適解がダイナミックスや評価系を表わすパラメータに依存せず、システムの線形性と評価系の2次性のみで定まる極めて普遍的な性質である。この性質は同時にその経済動学的含意(economic-dynamic implication)の問題も提起している。さらにはこのような数理経済学上の問題のみならず、広く動的最適化問題についてもこれらの

性質があることがわかった。ここで新たに『パラメトリック分数計画問題』を研究テーマに加え、その成果をまとめた。この中では、分数を(a)2次/2次、(b)2次/指数、(c)対数/2次、などに分類して最適解のゼロ和性を明示した。

(5) 2次数理計画問題を動的計画法自身の動的最適化問題として捉えなおし、その最適解である最適値関数と最適政策を求め、種々の性質を明らかにした。具体的には、所与の(主)動的計画に対してその双対動的計画を導き、両動的計画が表現する動的最適化問題---最小化問題と最大化問題---をベルマン方程式によって最適解を求め、両最適解の間に成り立つ双対性を明らかにした。これは離散時間上の動的最適化問題に対するベルマン方程式による最適解の導出による成果であるが、これと対照的に古典的な変分法に基づくオイラー方程式による最適解の導出も行い、導出過程、最適解の比較・検討を行った。さらに、このような最適解を求める過程で第3の方法ともいえるべき「不等式による接近」が適用可能であることが判明した。この方法では、特定の不等式---我々の研究対象である線形制約(ダイナミックス)下の自乗(平方)評価の最適化の場合は、相加・相乗平均(算術平均・幾何平均)不等式---1本を上手く活用すれば、瞬時に双対問題(過程)が導けて、同時にその最適解も得られることが判明した。この意味で交付申請時に意図した「解析解」が3つの方法(1)ベルマン方程式、(2)オイラー方程式、(3)不等式で導かれことになった。しかもこの3つの方法は本研究の多様性と深化に繋がり、経済動学を中心とする動的最適化問題の解明に資するものであることが判明した。

(6) 動的計画法をはじめとする種々の方法で解析できる問題として、有限変数および無限変数の2次数理計画問題に焦点を絞って、その最適解の構造と特徴を抽出した。具体的には、この(主)計画問題を制約条件付き最適化問題に変換し、これに拡大ラグランジュ乗数を導入して双対問題を導いた。「条件付き問題化」と「拡大ラグランジュ乗数の導入」は本研究独自の成果である。次に、主と双対の各々についてその最適解を微分・偏微分法、行列解析法、動的計画法、変分法など多様な方法で求めた。さらに、両問題に新たな双対関係---①相補双対性および②シフト双対性---が成立することを導いた。

(7) 以上の成果をまとめる意味で単著『最適化の数理II ベルマン方程式』を著わした。その章建ては以下のとおりである。第1章 多段分割、第1章 多段分割、第2章 解法、第3章 動的計画法、第4章 双対問題、第5章 双対化、第6章 黄金最適、第7章 ベ

ルマン方程式、第 8 章 経済成長、第 9 章 級数の最適化、第 10 章 確定系から確率系へ、第 11 章 離散近似。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① 岩本 誠二、木村 寛、藤田敏治、主双対「ダ・ヴィンチ・コード」、オペレーションズ・リサーチ、査読有、Vol.59、No.7、2014、(掲載決定)。
- ② 岩本 誠二、木村 寛、安田 正実、ドモアブルが求めた生起継続の確率計算と動的計画法、「不確実性の下での数理的意味決定の理論と応用」、京大数理研講究録、2014、(掲載決定)、査読無。
- ③ 岩本 誠二、木村 寛、藤田敏治、黄金最適化問題の双対化---不等式による ---、「不確実性の下での数理的意味決定の理論と応用」、京大数理研講究録、2014、(掲載決定)、査読無。
- ④ 岩本 誠二、木村 寛、藤田敏治、ラグランジュ関数のフィボナッチ鞍点、「不確実・不確定環境下における数理的意味決定とその周辺」、京大数理研講究録 1802、2012、pp. 50—56、査読無。
- ⑤ 岩本 誠二、木村 寛、交互ダ・ヴィンチ・コード 64、経済学研究 (九大経済学会)、第 7 8 巻 1 号、2011、pp. 1—26、査読無。
- ⑥ S. Iwamoto, Y. Kimura, The alternately Fibonacci complementary duality in quadratic optimization problem, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization, Vol.2, No.1, 2011, pp.93—103, <http://www.sci.nu.ac.th/jnao>, 査読有。
- ⑦ 岩本 誠二、最適経路 — フィボナッチから黄金へ —、「不確実性下における意味決定問題」、京大数理研講究録 1734、2011、pp. 196—204、査読無。
- ⑧ 岩本 誠二、木村 寛、2 次計画における交互フィボナッチ経路、「非線形解析学と凸解析学の研究」、京大数理研講究録 1755、2011、pp. 152—159、査読無。
- ⑨ 岩本 誠二、フィボナッチ分割 — 逐次型 —、経済学研究 (九大経済学会)、第 7 7 巻 2・3 号、2010、pp. 1—34、査読無。
- ⑩ 岩本 誠二、吉良 知文、植野 貴之、ダ・ヴィンチ・コード 64、経済学研究 (九大経済学会)、第 7 7 巻 1 号、2010、pp. 1—25、査読無。

[学会発表] (計 13 件)

- ① S. Iwamoto, Y. Kimura, and T. Fujita, Primal-dual inequalities through conjugate function, The Eighth

International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA13), Hirosaki University, Hirosaki, Japan, August 2-6, 2013.

- ② 岩本 誠二、木村寛、植野 貴之、藤田敏治、ベルマンの多段配分過程：その双対 (R. Bellman, Dynamic Programming, Chap1, A multi-stage allocation process : its dual), 第 56 回自動制御連合講演会、2013 年 11 月 16・17 日、新潟大学・工学部。
- ③ T. Ueno, and S. Iwamoto, Bellman's allocation process --- conjugate dual ---, The 26-th EURO - INFORMS Joint International Conference: Sapienza University of Rome, Italy, July 1-4, 2013.
- ④ S. Iwamoto, Y. Kimura, and T. Fujita, Two Golden Duals --- Complementary and Shift ---, The 26-th EURO - INFORMS Joint International Conference: Sapienza University of Rome, Italy, July 1-4, 2013.
- ⑤ S. Iwamoto, Y. Kimura, and T. Fujita, A Golden Complementary Duality in Quadratic Optimization Problem, The Third Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO-Asia 2012), Kunibiki Messe, Matsue, Japan, September 2-6, 2012.
- ⑥ S. Iwamoto, Continuous-time deterministic/stochastic dynamic optimization --- evaluation-optimization versus Bellman equation ---, The Nineteenth Triennial Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS2011), Melbourne Convention and Exhibition Centre, Melbourne, Australia, 10-15 July 2011.

[図書] (計 1 件)

- ① 岩本 誠二、「最適化の数理 II ベルマン方程式」、数理経済学叢書 5、知泉書館、pp. 449、2013。

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計 件)

名称：  
発明者：

権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi)  
九州大学・大学院経済学研究院・名誉教授  
研究者番号：90037284

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：