

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 17 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540157

研究課題名(和文)非因果的確率微分方程式の基礎的研究

研究課題名(英文)Basic study on noncausal stochastic differential equations

研究代表者

小川 重義 (OGAWA, Shigeyoshi)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：80101137

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：課題は次の4点；1,非因果的確率積分(Ogawa Integral)の研究、2,非因果的確率微積分方程式の研究、3,BPE(ブラウン粒子方程式；白色雑音を含む1階偏微分方程式)の研究、4,確率フーリエ変換(SFT)の研究。

成果は以下の通り；1,非因果的積分と対称積分との関係を明らかにした。2,フレドホルム型確率積分方程式の解の構成におけるSFTの応用、3,BPEの性質の解明と応用(非因果的ギルサノフ定理、非線形熱方程式の研究)、4,確率フーリエ係数が伊藤積分あるいはSkorokhod積分やOgawa積分で与えられる場合についてSFTの逆変換可能性と逆変換公式について基礎的結果を得た。

研究成果の概要(英文)：The main subjects are; study on (1) the noncausal stochastic integral, (2) noncausal stochastic integral or differential equations, (3) BPE(Brownian particle equations), (4) SFT(stochastic Fourier transformation).

The results are; (1) relation between Ogawa integral and the symmetric integral is clarified, (2) Solution by SFT of the stochastic integral equation of Fredholm type. (3) study of solutions of BPE and applications (eg. establishment of a noncausal Girsanov's theorem), (4) study of SFT, the question of its invertibility in various cases.

研究分野：確率論、非因果的確率解析

キーワード：非因果的確率解析 非因果的確率微積分方程式 ブラウン粒子方程式 確率フーリエ変換 非因果的確率システム

1. 研究開始当初の背景

「非因果的確率解析」即ち因果性の前提に束縛されない確率解析は既に 1970 年代、旧ソ連の A. Skorokhod 及び S. Ogawa (小川重義) により、それぞれ異なった型の積分が独立に導入されている。このほかにもいくつかのモデルが提案されてはいるが、いずれも理論的に上記いずれかの積分理論に帰着されるものである。Skorokhod の積分は伊藤積分の自然な拡張であることはよく知られているが、研究代表者が導入し、今日欧米の研究者から Ogawa Integral と呼ばれている非因果的積分 (cf. M. Zakai - D. Nualart, 1986) はいわゆる対称積分の自然な拡張になっていることが代表者自身によって示されている。伊藤の確率解析、更には Skorokhod の積分を用いた解析を非線形汎関数の立場から整理したものが Malliavin Calculus であり、S. Ogawa の積分に基づくものが非因果的確率解析である。後者についてはその効力とモデル定式化に於ける利便性が最近ようやく認識されるようになってきている。即ち、S. Ogawa の非因果的解析の大きな特徴は乱関数のシステムの駆動力過程 (例えば、ブラウン運動) に関する因果性 (即ち駆動力過程に付随する自然なフィルタレーションへの適合性) を気にすることなく自由に確率解析を展開できるところにあり、従って確率微分方程式や伊藤公式を非因果的環境 (非因果的初期・境界条件、非因果的係数) の下で、更には駆動力が非マルチンゲールな確率過程の場合でも扱える所にある。今ひとつの特徴は S. Ogawa の非因果的確率積分は乱関数の空間上での変換として「強い線形性」を有していることであり、これは SDE や SPDE 等の確率関数方程式の研究に好都合な性質である。Skorokhod 積分はこの性質を持たない。

2. 研究の目的

伊藤理論で知られる確率解析は現代確率論の支柱の一つであるが、数理科学や工学の諸分野においても白色雑音あるいはもっと一般にマルチンゲールにより駆動される確率的システムのモデル化や解析の為の標準言語として不可欠の役割を果たしている。しかしながら数理科学や工学にはこの理論が提供する標準的枠組みでは定式化すらできない問題が多々ある。非因果的問題がそれである。例えば数理ファイナンスに於けるインサイダー取引問題のように情報先取りのある非因果的システムの定式化とか、物理的問題では白色雑音を係数に含む 2 階微分方程式に対する 2 点境界値問題から導かれるフレドホルム型確率積分方程式のように、対象となる乱関数が駆動力 (マルチンゲール) に関して因果的な関数であると仮定できなくなる場合があり、さらには画像処理問題に例をとれば画像を表す確率場がみだすべき関数方程式がブラウン敷布のようにマルチンゲールですらない多次元係数の基本過程に駆

動される為「因果的枠組み」そのものが無意味となる。ところで、このような非因果的問題の解析手段として申請者 (S. Ogawa, Comptes Rendus Fev.28, 1979) の導入した非因果的確率解析や、それとは異なり旧ソ連の A. Skorokhod により導入された確率解析の理論がある。

本研究計画の主題は申請者自身の非因果的確率解析の研究であり、目標はこの非因果的確率解析理論を発展・整備し、上に例示したような数理科学あるいは工学における様々な非因果的問題のモデル化と数値解析への応用を容易にする道筋をつけることである。

3. 研究の方法

(1) 研究の全期間 (H22 ~ H26) を通じて重点を基礎理論面においた。基礎的課題としては非因果的確率積分可能な乱関数の特徴付けと対称積分との関係の解明。また応用的課題では各種の非因果的関数方程式の基礎的研究、非因果的 SDE・SIE (確率積分方程式) をその非因果性が起因する事情の違いによって典型的な型に分け (非因果的初期値問題、非因果的境界値問題、非因果的積分方程式、多次元径数乱関数など) 最終的にはそれぞれの場合について方程式の基本的性質の解明を目指した。またこれと平行して輸送現象を表す確率偏微分方程式、即ちブラウン粒子方程式、の初期値問題の基礎的研究と応用を目指した。

(2) 計画の前半期間、平成 22 ~ 24 年度は初めの準備段階として、基礎的課題としては非因果的確率積分と対称積分との関係解明を扱い、応用面では金融工学に於ける一般的 (線形) SDE モデルのパラメーター推定などの研究と非因果的初期条件下での SDE・SIE の解の構成法についての研究を対象を絞った。研究の進行と必要に応じて、国内外の研究会に参加して研究交流・資料収集を計るほか、関連研究者を招き討論を行った。

(3) 平成 24 年 ~ 26 年度の研究計画; 平成 22 ~ 24 年度の計画を継続しつつ、研究の重点を非因果的確率関数方程式 (特にフレドホルム型確率積分方程式、並びにブラウン粒子方程式の初期値問題) の解の構成と性質の研究、それらの結果の確率解析への応用に移した。またフレドホルム型 SIE の研究に関連して確率フーリエ変換に注目し、その性質の解明につとめた。この場合も研究の進行と必要に応じて、国内外の研究会に積極的に参加して研究交流・資料収集を計るほか、関連研究者を招き討論を行った。

4. 研究成果

冒頭の概要に記したように本研究計画の主要課題は次の 4 点であった; (1) 非因果的確率積分 (Ogawa Integral) の意味で積分可能な乱関数の特徴付けと対称積分との関係の解明、(2) 非因果的確率微積分方程式、とくにフレドホルム型確率積分方程式の解の基本的性質の解明、(3) BPE (ブラウン粒子方程式; 白色雑音を主要部の係数として持つ 1 階

偏微分方程式)の解の基本的性質の解明、(4) 確率フーリエ変換 (SFT) の基本的性質の解明。それぞれについて得られた成果は以下の通りである；

(1)乱関数のブラウン運動に関する微分可能性 (B-微分可能性) の概念を拡張し、B-微分可能な乱関数の非因果的積分可能性についての結果を得た。またこの場合の非因果的積分と対称積分との関係を明らかにした。

(2)一般的な非因果的条件 (非因果的係数、非因果的初期条件) における確率微分方程式の解の存在と一意性に関する定理、およびそうした非因果的解に関する非因果的伊藤公式 (noncausal Ito formula) を示した。また、線形フレドホルム型確率積分方程式の解の構成における SFT の応用を示した。

(3)BPE (ブラウン粒子方程式) の初期値問題について解の存在と一意性定理を確立し、応用として「ギルサノフ定理」の非因果的拡張形 (noncausal counterpart of Girsanov's theorem) や、非線形熱方程式 (eg. stochastic Burgers' eq) の確率解の構成法を示した。

確率フーリエ変換 (SFT) の性質の解明；SFT はフレドホルム型確率積分方程式の研究に際して研究代表者 (S.Ogawa, 1987) が初めて導入したものであるが、この他にも応用方面ではヴォラティリティー推定問題におけるデータの一変換方式として現れることが知られている (cf. P.Malliavin et al, 2007)。SFT は対象となる乱関数の確率フーリエ係数 (SFC) から構成されるので、この SFC の定義に用いられる確率積分により異なった SFT が可能である。上述のフレドホルム型積分方程式の研究では非因果的積分 (即ち Ogawa Integral) が、またヴォラティリティー推定問題では伊藤積分が使用される。また SFT の可逆性も「分布の意味」(in law)、および「同じ関数空間での」(in strong sense) 逆変換可能性の解明が課題となる。本研究では主に伊藤積分や Skorokhod 積分による SFT については「弱い意味」での逆変換可能性について、また伊藤積分や非因果的積分による SFT についてはある種の条件の下で「強い意味」での逆変換が可能であることを示し、同時に逆変換公式 (或いは、手順) も示した。

これらの結果は 8 編の論文にまとめ、うち 6 編は欧文学会誌 (査読有) に掲載された (1 つは投稿中)。また日本数学会年会をはじめとして国内外の学会や研究会 (16 件) で発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

{ 雑誌論文 } (計 8 件)

Ogawa, S. "A direct inversion formula for SFT", Sankhya A 査読有, 77-1 (2015), 30-45
DOI: 10.1007/s13171-014-0056-1

Ogawa, S and Uemura, H. "Identification of a noncausal Ito process from the stochastic Fourier coefficients", Bull. des Sci. Mathematiques, 査読有 Vol. 138, Issue 1, Jan-Feb (2014), 147-163, DOI: 10.1016/j.bulsci.2013.12.003

Ogawa, S. and Uemura, H. "On a Stochastic Fourier Coefficient: Case of Noncausal Functions", J Theor Probab, 査読有, 27-2 (2013), 370-382, DOI: 10.1007/s10959-012-0464-x

Ogawa, S. "On a stochastic Fourier transformation", Stochastics 査読有, 85-2 (2013), 286-294, DOI: 10.1080/17442508.2011.651621.2012

Ogawa, S. and Sanfelici, S. "An improved two-step regularization scheme for spot volatility estimation", Eco. Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA, 査読有, vol. 40, no. 3 (2011), 105-132
DOI: 10.1111/j.1468-0300.2011.00233.x

Ogawa, S. and Ngo, Hoan-Long "Real-time estimation scheme for the spot cross volatility of jump diffusion processes, Math. & Computers in Simulation, 査読有, 80-9 (2010), 1962-1976, DOI: 10.1016/j.matcom.2010.01.009

{ 学会発表 } (計 16 件)

小川重義、"BPE and a noncausal counterpart of Girsanov's theorem", 日本数学会 2015 年会, 21 March 2015, 明治大学 (東京都)

Ogawa, S. "TFS et le probleme de l'inversion" Seminaire de Proba et Statist at ENSTA, 15 Dec. 2014, Paris (France)

小川重義、植村英明, "On the identification of noncausal functions from the SFCs" 日本数学会 2014 年会, 24 Sept. 2014, 明治大学 (東京都)

小川重義、"A Direct Inversion Formula for Natural SFT" 日本数学会 2014 年会, 25 Sept. 2014, 広島大学 (広島県、広島市)

Ogawa, S. "On a direct inversion formula for SFT" ISI Semi. on Proba and

Statist,
13 Feb. 2014, Bangalore, India

Ogawa,S. "Noncausal stochastic calculus and its applications", ISI Semi, on Proba. and Statist. 10 Feb.2014, Kolkata, India

小川重義、植村英明, "Identification of noncausal Ito processes from the SFCs"
日本数学会 2013 年会, 24 Sept. 2013, 愛媛大学(愛媛県、松山市)

小川重義、"Noncausal Problems and Calculus", 確率論ヤングサマーセミナー連続講演、2012年8月22~24日、旅館鈴岡(愛知県・蒲郡市)

Ogawa,S. "Noncausal Problems and Calculus in Mathematical Physics" Spring School on Stochastic Theory, 9-17 April 2010, Taipei (Taiwan),

〔図書〕(計 1 件)

小川重義、「確率論ハンドブック」(第15章後半,pp 547--565)、丸善、2012

〔産業財産権〕

取得状況(計 1 件)

名称：ヴォラティリティの推定装置、及びそのコンピュータプログラム、並びにヴォラティリティ推定方法
発明者：小川 重義
権利者：立命館大学ノ小川重義
種類：特許
番号：特許5263736号
出願年月日：平成20年6月23日
取得年月日：平成25年5月10日
国内外の別：国内

6. 研究組織

(1)研究代表者

小川 重義 (OGAWA Shigeyoshi)
立命館大学・理工学部数理科学科・教授
研究者番号：80101137