様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 4 月 29 日現在

機関番号：３４４２８
研究種目：基盤研究(C)
研究期間： 2010 ～ 2012
課題番号：２２５４０１６１
研究課題名（和文） 流体方程式系の分岐と解構造解析

研究課題名（英文） Bifurcation and structure of solutions for fluid dynamical systems

研究代表者
寺本 惠昭 （TERAMOTO YOSHIAKI）
摂南大学・理工学部・教授
研究者番号：４０２３７０１１

研究成果の概要（和文）：圧縮性熱対流、斜面上および鉛直平板に沿う重力下の粘性非圧縮性流体, 自由表面をもつ Benard-Marangoni 対流、これらの運動を記述する流体方程式系を主な対象として、線形化問題のレゾルベントの構成とその評価から進んで、本来の非線形問題の解の存在、解空間の分岐構造やその安定性解析を行なった。線形化問題のレゾルベントが解析的半群の生成作用素となる評価を示すことが、分岐解の存在およびその解の定性的性質を求めることの鍵になる。圧縮性熱対流定常問題については解の存在と熱伝導解からの定常分岐解の存在の証明を得た。

研究成果の概要（英文）：We are concerned mainly with fluid dynamical systems describing motions for compressible heat convection, viscous incompressible flow down an inclined plane or down a vertical plane under the gravity. After constructing resolvent operators and estimating their norms we proved existence of solutions to full nonlinear problems and studied bifurcation structure and stability of solutions. To show existence proof and asymptotic property of bifurcating solutions, it is the key point that those resolvent operator generate an analytic semigroup in a suitable function space. We proved the existence of stationary solution to the compressible heat convection and obtained the bifurcating branch from the heat conducting state.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	１，１００，０００	３３０，０００	１，４３０，０００
２０１１年度	８００，０００	２４０，０００	１，０４０，０００
２０１２年度	５００，０００	１５０，０００	６５０，０００
年度			
年度			
総　計	２，４００，０００	７２０，０００	３，１２０，０００

研究分野： 非線形偏微分方程式
科研費の分科・細目：数学一般 ４１０３
キーワード：ナビエ・ストークス方程式 ベナール・マランゴニ対流 圧縮性熱対流 定常・周期解分岐 自由表面流

１．研究開始当初の背景
（１）斜面上および鉛直平板に沿って重力影響下に流れ下る粘性非圧縮性流体の運動方程式について、適切な関数空間において発展方程式として定式化することを始めた。この流体現象は 1940 年代後半の物性物理学者カピッツァの先駆的実験で、定常状態の層流が不安定化し自由表面上に波列が生じる典型

例に挙げられた。重力下に水平面上に置かれた安定状態にある粘性非圧縮性流体を傾斜面上に置くという操作はもっとも自然な不安定化であり、定常流から周期転波が現れる現象は、平衡状態遷移のもっとも簡単な現象例である。線形化固有値問題として不安定固有値がいつどのように現れるのかという問題は、浅水波の極限または長い周期性を仮定した極限で、流体物理学で数多くの研究がなされてきたが、数学解析として厳密に取り扱う研究としては、この課題に先立つ西田、寺本の研究が先駆けの状態にあった。ナビエ・ストークス方程式は、非線形偏微分方程式の典型例として 1930 年代から解析学の手法開発の牽引車の役割を果たし続けているが、固定領域での研究が大半で、自由表面問題、とくに解の定性的性質についての研究はやっと端緒にたどり着いた状態であると考えられる。

（２）木星などの太陽系惑星をとりまく大気の文様は、圧縮性熱対流の織り成すパターン形成として、天文観察の興味と関心を物理学研究者にもたらしてきた。Spiegel の 1960 年代の論文は物理的直観により提唱された指針となる先駆的研究である。同時期の Unno・Kato・Makita の論文も流体物理学的取扱いながら数学的厳密性の必要を示している。

非圧縮性熱対流問題は 19 世紀末から流体物理学研究者により Oberbeck-Boussinesq 方程式系として定式化され、数学解析的にも数多くの研究成果が発表され、とくに熱対流分岐問題として現れる表面パターンの形成については、安定性の移行も含めて多くの関心をいまだに集めている。この研究課題では、圧縮性熱対流問題を定式化し Oberbeck-Boussinesq 方程式系に対して開発された研究方法の適用を試みた。定常解の存在およびパラメーターに依存した解の分岐構造の解明、そして非圧縮性熱対流問題との間の漸近関係について調べることを始めた。

２．研究の目的

数理科学に現れる問題の多くは非線形微分方程式の初期境界値で記述される。それらの解析的厳密な取扱いを研究することは、解析学発展の駆動力であり、解析学の指針を与え続けている。

非線形偏微分方程式の典型例である流体方程式系について、自然に現れる自明解の安定性を考察する。とくに現実に現れる現象をモデル化した問題をとりあげ、パラメーターに依存して平衡状態の遷移をに対応する、解構造およびその構造安定性を解析したい。

即ち、定常解・時間周期解などの定性的性質・漸近挙動を調べ、解全体が設定された関数空間の中でなす集合構造と構造としての安定性、その遷移の仕方、それらが系に含まれるパラメーターにいかに依存するのかを調べたい。

（１） 粘性非圧縮性自由表面流を記述する方程式系には、２階の運動方程式とともに１階の自由表面を記述する方程式が現れる。方程式が定義される領域自体が未知関数により与えられるため、固定領域への変換方法が先ず第一の問題となる。さらにこの変換により、境界条件および方程式系に強い非線形性が現れ、この非線形性を統御するために、取り出した線形問題の可解性ならびにその解の精密な評価が必要になる。また非線形項が定義できる関数空間の設定が重要である。線形化システムが解析的半群を生成する関数空間の設定とレゾルベント作用素とその評価に基づいて、初期値問題の解の存在、定常解からの定常・周期解分岐の存在を示す。数学的結果を得るためだけなら、すでに十分な評価と結果がえられているが、取り扱う問題が現実にみられる現象をモデル化した問題なので、物理的にみて妥当な結果でないと、現象との整合性は得られない。そのため、線形化問題の解の構成に現れる様々な定数についても、厳密な評価が必要となり、それらの対応についての考察、評価法の開発もこの課題の目的である。

（２） 圧縮性熱対流問題の方程式系では、密度変化も考慮するため１階の連続方程式も系に含まれる。密度変化のみ考慮し温度を除外したモデルについては既存の結果があった。密度、温度、流速、圧力をすべて考慮したモデルをとりあつかうので、密度の方程式が 1 階であることは、通常の線形化問題では正則性の低下がおこる。温度を含まない方程式系について、Heywood・Padula・Bause・Novotny らが開発した輸送方程式を経由した反復スキームを、ここで扱う問題に適用できるように改良し、これにより必要な微分階数の得られる正則性を回復する。この結果をつかって、定常解・定常分岐解の存在を示し、無次元化パラメーターの漸近極限として非圧縮熱対流の解に漸近することを示す。

３．研究の方法

実解析学・関数解析学・数値解析学の理論・方法の現在得られる最高の成果をとりいれ

る。またそれらの限界も考慮して固有値問題では、計算機支援解析もとりいれる。設定された関数空間のなかの解の集合のパラメーター依存性を調べることは、基本的には非線形問題の分岐理論を適用することであり、既存の理論がまにあわなければ、適用可能な形に整備しなければならない。自明な平衡解からの一次分岐問題においても、自由表面問題では、特有の困難さが現れる。分岐理論を適用する時には、線形化方程式系の固有値について、詳細な情報が必要になるが、この課題で扱う系は、一般に自己共役ではなく、スペクトル解析の段階で問題に応じた手法開発が必要となる。実解析学・フーリエ解析の手法を駆使するとともに、精度保証計算に基づく計算機支援証明による解析も用いる。

（１） 自由表面問題では、Bock・Beale らにより開発された、自由表面のグラフを表す未知関数を流体領域内に拡張し、これをもちいて固定領域に変換する方法を採用する。この操作により方程式系および境界条件に強い非線形性が現れる。これらを取り扱える関数空間の設定とそこでの線形化問題の可解性とその解の評価が非線形問題の解の存在に重要な役割を果たす。線形系は自己共役作用素ではないので分岐固有値の存在とパラメーター依存性は計算機支援による。線形問題の解の構成には次の 2 段階を考える。まず同次境界条件非同次方程式系については、内積に基づいた弱解を求め正則性を上げる。非同次境界条件同次方程式系については Solonnikov の開発したフーリエ・ラプラス変換による半空間問題での解構成と評価法を使う。この課題では周期的スラブに問題がされる帰着されるため、有限区間上の常微分方程式系の境界値問題になり、評価に必要な定数の厳密化が図られる。

（２） 圧縮性熱対流問題について熱伝導解からの擾乱問題を定式化しその解の定常問題、ならびに定常分岐問題を考察する。密度の方程式が微分の階数が足りないため,Heywood・Bause・Padula らにより開発された輸送方程式による密度関数の正則性を得る方法を温度関数を含む場合に適用できるように改良し解の存在・分岐解の存在を示す。また線形化問題のレゾルベント作用素について、セクトリアル性質を示せる関数空間を設定し、そこで必要な線形問題の解の評価を求める。またその評価に用いる不等式について現れる定数については最良化をはかる。

４．研究成果

（１） 鉛直平板に沿う粘性非圧縮性流体方程式系については、線形化問題の解の評価の厳密化を継続して研究している。これに必要となる Korn の不等式、Korn・Poincare の不等式の最良定数についての結果を発表している。また定常流の安定性のためのレイノルズ数・表面張力定数についての十分条件を求めた。現在、結果を論文に執筆中である。

（２）圧縮性熱対流方程式系について、解の正則性を回復する反復スキームを考案し定常解の存在を示した。またこの方法を用いて定常分岐解の存在を示した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

（１）<u>T.Nishida</u>, M.Padula, and <u>Y.teramoto,</u> Heat Convection of Compressible Viscous Fluids: I , Journal of mathematical fluid mechanics Vol.15, 2013, Online 査読有

（２）K.Tomoeda and <u>Y.Teramoto,</u> Optimal Korn's inequality for solenoidal vector fields on a periodic slab、Proceedings of the Japan Academy, 88, 168-172, 2012 査読有

〔学会発表〕（計３件）

（１）<u>Y.Teramoto</u>
Navier－Stokes flow down a vertical wall, German-Japan joint spring school, Technical University of Darmstadt, Darmstadt, Germany 2011 Feb 28

（２）<u>Y.Teramoto</u>
Navier-Stokes flow down an inclined plane、Workshop, optimization and simulation of complex fluid flow、Technical University of Darmstadt, Darmstadt, Germany 2012 Jun 20、招待講演

（３）<u>Y.Teramoto</u>
Free surface flow of viscous incompressible fluid、Parabolic and Navier-Stokes Equations、Banach center, 2012 Sep 2, Bedlewo, Poland

６．研究組織

(1)研究代表者

寺本惠昭（TERAMOTO YOSHIAKI）
摂南大学・理工学部・教授
研究者番号：40237011

(2)研究分担者
伊東恵一 (ITO KEIICHI R.)
摂南大学・理工学部・教授
研究者番号：50268489

(3)研究分担者
島田 伸一 (SHIMDA SHIN-ICHI)
摂南大学・理工学部・准教授
研究者番号：50268489

(4)連携研究者
西田孝明 (NISHIDA TAKAKI)
京都大学・情報学研究科・研究員
研究者番号：70026110