様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　２５年　６月　１４日現在

機関番号：３４５０４
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５４０１６２
研究課題名（和文）　補間多項式の収束性の研究

研究課題名（英文）　On Convergence of Sequences of Interpolating Polynomials

研究代表者
北原　和明（KITAHARA KAZUAKI）
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号：40195277

研究成果の概要（和文）：近似される連続関数と補間多項式の標本点の取り方との関係について研究を行った。主な成果は２つある。１つは標本点の位置に関係なく標本点の個数を無数に増やしていくと補間多項式が、近似される連続関数に収束するような関数は解析的であるという結果であり、もう１つは節点が１個のスプライン関数が、標本点２個のエルミート補間多項式列の極限として表わされる（２点テイラー展開可能）という結果である。

研究成果の概要（英文）：We have studied relations between approximated continuous functions f and places of nodes of interpolating polynomials for f. We have two main results. One is that functions which can be approximated by any sequence of interpolating polynomials obtained by increasing nodes are analytic. The other is that spline functions g with one knot are expressed as the limit of a sequence of Hermite interpolating polynomials for some two nodes.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
総　計	1,400,000	420,000	1,820,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：多項式補間

１．研究開始当初の背景

多項式による補間はニュートンが、観測した惑星や彗星の位置から観測していない時刻の惑星や彗星の近似的な位置を調べようとしたことから始まる。その方法は非常に自然な方法である。まず、ここでの多項式補間を簡単に説明しておく。区間 $[-1,1]$ 上の連続関数 f を近似される関数とする。区間 $[-1,1]$ の点（標本点とよぶ）$(-1 \le) x_0 < x_1 < \cdots < x_n (\le 1)$ に対して $\mathrm{p}(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, \mathrm{n}$ となるような高々 n 次の多項式 p を f の近似多項式として定義し、標本点以外の点 x における f の値の近似値として $\mathrm{p}(x)$ を用いるという方法が多項式補間の最も基本となるものである（ラグランジュ補間とよぶ）。また、標本点が重複する場合では、標本点の重複した度合いに応じて f の高次の導関数値と多項式 p の同じ次数の導関数値が一致するような補間多項式を考える（エルミート補間とよぶ）。ただ、エルミ

ート補間を考えるには、f がそれに見合う微分可能性をもつ必要がある。これらラグランジュ補間多項式やエルミート補間多項式の近似度は標本点の位置や標本点の個数に大きく依存する。
多項式補間という関数近似の方法が考え出されて以来、ラグランジュ補間多項式やエルミート補間多項式の近似特性は常に重要な課題として研究されており、特に１９世紀末以降深く研究されている。大雑把なことをいうと、近似される関数の解析性が高ければ高いほど、標本点の位置はいいかげんでも標本点の個数を増やせば、補間多項式の近似度は高まる傾向にある。しかし、一方でルンゲ関数は解析的であるが、標本点を $[-1,1]$ を等分に分割する点としてラグランジュ補間多項式を考えたとき、標本点の個数を増やせば増やすほど、補間多項式は近似される関数から離れて発散していくことがわかっている。このように多項式補間は、関数近似において有用な方法ではあるが、補間多項式の収束や発散については微妙な問題があり、まだ未解決な問題が多く残されている。

２．研究の目的

ここではラグランジュ補間多項式やエルミート補間多項式の収束性に取り組む。主な課題は以下の２つである。
(1) 標本点の位置に関係なく標本点の個数を無数に増やしたときのラグランジュ補間多項式が、近似される連続関数 f に収束するような関数 f の特徴づけを考える。また、標本点列として望ましいと考えられる MR 標本点列について考察する。
(2) 標本点の個数は２個としておいて、各標本点での重複度を増やしたときに考えられるエルミート補間多項式列が、近似される連続関数 f に収束するような関数 f の特徴づけを考える。

３．研究の方法

この研究は基本的には課題に関わる結果の理解、予想に基づく数値実験、研究分担者（地道正行）・研究協力者（西野好行）と研究の打ち合わせ、意見交換をして、少しずつ進められた。研究代表者は研究全般に関わり、研究分担者は条件を満たす関数を見つけるための数値実験を主に行い、研究協力者は関連する文献の結果の検討を主に行った。また、課題（1）と課題（2）とも代表者の研究室の大学院生が参加し、数値実験の指導を受けて、数値実験およびそのデータの整理などの補助を行った。
(1) 平成２２年度は課題（1）を中心に研究を行った。被近似関数である連続関数 f として、いかなる標本点の集合の列をとっても、それによってできる f の一般化された補間多項式の列が f に収束するような f の特徴づけに取り組んだ。一般化された補間多項式というのは、通常の多項式と同じようにラグランジュ補間を考えることができる関数系である無限完全チェビシェフ系による補間を考えたのときの補間関数のことである。これについては、研究協力者である西野好行氏が関連する文献研究をし、被近似関数 f の性質を調べた。また、標本点列として望ましい性質をもつ MR 標本点列なるものを定義して、MR 標本点列となるための条件を研究した。これについては研究分担者の地道正行氏と数値実験と議論を重ねた。この研究は、多項式補間における標本点の位置と補間多項式の近似度の関係を調べることにつながる。
(2) 平成２３年度は課題（2）を中心に研究を行った。与えられた関数がある 1 点の標本点で無限回微分可能な時，その標本点についてのエルミート補間多項式はその点を中心とするテイラー多項式になることがわかっている。これを基に、2 点の標本点で無限回微分可能な関数を用意し、2 点テイラー展開可能であることの定義を考え 2 点テイラー展開可能な関数のクラスを見つけることを行った。まず，関数 f が 2 点テイラー展開可能であることの定義であるが、与えられた 2 個の標本点における重複度 n（各標本点の重複度が n）のエルミート補間多項式 $P_n(x)$ を考え，n を無限大にしたときに P_n が被近似関数に定義された区間の点で収束するとき、f は与えられた 2 点でテイラー展開可能であると呼ぶことにする。以上の定義から、大きく 2 つの問題を調べた。1 つは 1 点テイラー展開可能な関数(通常のテイラー展開可能な関数)が 2 点テイラー展開可能であるかどうかとうことであり、もう 1 つは1 点テイラー展開可能ではない関数で 2 点テイラー展開可能である関数を見つけることに取り組んだ。これらの問題は、研究代表者が関連する文献研究をし、研究分担者からアドバイスをもらいながら研究代表者の研究室の大学院生が数値実験を行って、予想を立てて数学的な結果として証明できるかを行った。
(3) 平成２４年度は前年度に得られた結果を基に課題（2）を研究した。つまり、昨年度見つかった 2 点テイラー展開可能な関数のクラス以外の２点テイラー展開可能な関数のクラスを探したり、2 点テイラー展開の項別微分可能性を調べることに取り組んだ。これらの問題は、研究代表者が昨年度得られた結果や本質的な部分を整理した上で、関連する文献研究をして、数値計算の部分では山田孝子氏や研究分担者からアドバイスをもらいながら研究代表者の研究室の大学院生が数値実験を行って、予想を立てて、数学的な結果として証明できるかを行った。

４．研究成果

(1) 平成２２年度の研究成果を述べる。

①まず、必要となる記号や定義を説明する．$C[a,b]$ を閉区間 $[a,b]$ 上で連続な実数値関数の全体とし、$C[a,b]$ に一様ノルム $\|\cdot\|$ が導入されているとする。

定義１． $C[a,b]$ の一次独立な関数系 $\{u_0,u_1,\cdots,u_n\}$ がチェビシェフ系であるとは、$[a,b]$ の相異なる任意の $n+1$ 個の点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ に対して $n+1$ 次の行列式 $(u_i(x_j))_{i,j=1}^{n}$ が 0 でない場合をいう。

チェビシェフ系 $\{u_0,u_1,\cdots,u_n\}$ の線形結合全体を $L[u_0,u_1,\cdots,u_n]$ と表す．今、$x_0,x_1,\cdots,x_n$ を $[a,b]$ の相異なる標本点とし，$y_0,y_1,\cdots,y_n$ を任意の実数とするとチェビシェフ系の定義からわかるように $u(x_i)=y_i$, $i=0,\cdots,n$ を満たす $u\in L[u_0,\cdots,u_n]$が一意的に定まる。つまり，チェビシェフ系はラグランジュ多項式補間と同じ補間を考えることが関数系である。

定義２． $C[a,b]$ の一次独立な無限関数系 $\{u_0,u_1,\cdots,u_n,\cdots\}$ が無限完全チェビシェフ系であるとは、各 $n=0,1,\cdots$ について、$\{u_0,u_1,\cdots,u_n\}$ がチェビシェフ系である場合をいう。

定義３． $\{u_0,u_1,\cdots,u_n,\cdots\}$ を $C[a,b]$ の無限完全チェビシェフ系とする。$C[a,b]$ の部分空間 F を次のように定義する。f が F に属するのは、X_n , $n=1,2,\cdots$ が $[a,b]$ の相異なる標本点の集合で、$|X_n|\to\infty$ $(n\to\infty)$ なるものに対して、P_n を X_n に属する標本点で f を補間する $L[u_0,\cdots,u_n]$ の一般化された多項式とするとき，常に

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-P_n(x)\|=0$$

が成立することをいう。

以上の定義から次の結果を導いた。

定理． k を 1 より大きい整数とし、$\{u_0,u_1,\cdots,u_n,\cdots\}$ を各 u_n が $[a,b]$ 上の k 回連続微分可能な関数からなる無限完全チェビシェフ系とする。このとき，F に属する関数は$k-1$ 回連続微分可能である．

系１． $\{u_0,u_1,\cdots,u_n,\cdots\}$ を各 u_n が $[a,b]$ 上の無限回微分可能な関数からなる無限完全チェビシェフ系とする。このとき，F に属する関数は無限回微分可能である．

系２． $[a,b]$ 上の無限完全チェビシェフ系として、$u_n=x^n$, $n=1,2,\cdots$とする。このとき，F に属する関数は$[a,b]$ で解析的で、点 a, 点 b におけるテイラー展開の収束半径は $b-a$ よりも大きい．

②必要となる定義を述べる。

定義１． 区間 $[-1,1]$ における標本点列 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ が MR 標本点列であるとは、$|u(x_i)|=1$, $i=0,1,\cdots,n$となる高々n 次多項式 $u\in L[1,x,\cdots,x^n]$ のうち，u の$[-1,1]$における零点が n 個であるものがちょうど 2 個であるときをいう．

標本点列 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ が MR 標本点列であるとき、$|u(x_i)|=1$, $i=0,1,\cdots,n$ となる高々n 次多項式 $u\in L[1,x,\cdots,x^n]$ のうち，u の $[-1,1]$ における零点が n 個であるものは $u(x_i)=(-1)^i, i=0,1,\cdots,n$ であるか $u(x_i)=(-1)^{i+1}, i=0,1,\cdots,n$であるかの何れかだけであるので、この条件を満たす標本点列における補間は比較的無駄な動きが少ないものと考えてよい．

MR 標本点列について、次の結果を得ている。

定理１． $[-1,1]$ 上の関数系 $\{1,x,\cdots,x^n\}, n=0,1,2,3$ において次が成立する。

(i) x_0,x_1,x_2 が $\{1,x,x^2\}$ の MR 標本点列であるための必要十分条件は

$$x_0+x_1+x_2\leq\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_1-x_0)^2}$$

および

$$x_1+x_2-2\leq-\sqrt{(x_0-x_1)^2+(x_0-x_2)^2}$$

の 2 つの条件を満たすことである．

(ii) ε を$0<\varepsilon<1$ である正数とする．このとき，$-1,-\varepsilon,\varepsilon,1$ は $\{1,x,x^2,x^3\}$ の MR 標本点列である。

定理２． 区間 $[-1,1]$ において、標本点列 $-1<x_0<x_1<\cdots<x_n<1$ が

$$\frac{1}{x_n-x_0}+\frac{1}{x_n-x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n-x_{n-2}}>\frac{1}{x_n-x_n}$$

を満たしているならば，$x_0,x_1,\cdots,x_n$ は MR 標本点列ではない。

(2) 平成２３年度の成果を述べる。

まず、必要となる記号や定義を説明する。

定義１． 関数 $f(x)$は点 x_0 で無限回微分可能な関数とするとき、標本点 x_0 で重複度 $n+1$ の高々n 次のエルミート補間多項式 を $P_n(x)$とする。このとき、

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x), x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

(δ は適当な正数)

であるならば、$f(x)$ は 1 点 x_0 を中心にして $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ でテイラー展開可能であるという。

定義２． 関数 $f(x)$ は点 x_0, x_1 で無限回微分可能な関数とするとき、標本点 x_0,x_1 $(x_0<x_1)$ でそれぞれ重複度 $n+1$ の高々$2n+1$ 次のエルミート補間多項式を $P_{2n+1}(x)$ とする。このとき、

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n+1}(x)=f(x), x\in(x_0-\delta,x_1+\delta),$$

(δは適当な正数)

であるならば、$f(x)$ は 2 点 x_0, x_1を中心にして$(x_0-\delta, x_1+\delta)$で 2 点テイラー展開可能であるという。

2 点テイラー展開可能に関する主な成果は以下の通りである。

定理１． $f(x)$ は原点を中心として$(-1,1)$ でテイラー展開可能な関数ならば、$f(x)$は 2 点$-a, a$ $(0<a<\frac{1}{\sqrt{2}})$ を中心にして $(-1,1)$ で 2 点テイラー展開可能である。

定理２． $f(x)$ は $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 上の関数で、原点を節点とする連続な区分的多項式関数とするならば、$f(x)$ は$-1,1$ を中心にして $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ で 2 点テイラー展開可能である。

(3) 平成２４年度は平成２３年度の成果を踏まえて、次のような主な結果を得た。

定理１． r を$r>1+\sqrt{2}$である実数とし、区間$[-r,r]$上の関数$f(x)$は$[0,r]$上では$\alpha(x)$、$[-r,0)$上では $\beta(x)$で表されるとする。ただし、$\alpha(x)$は 1を中心として収束半径が$\sqrt{2}$より大きいテイラー展開可能な関数であり、$\beta(x)$は-1を中心として収束半径が$\sqrt{2}$より大きいテイラー展開可能な関数である。また, $P_\ell(x)$は標本点$-1,1$で各標本点における重複度がℓの$f(x)$のエルミート補間多項式とする。このとき、以下が成立する。

(i) $f(x)$は$-1,1$を中心として、$(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$の範囲で 2 点テイラー展開可能である。

(ii) さらに$f(x)$が原点においても連続であれば、$f(x)$は$-1,1$を中心として、$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$の範囲で 2 点テイラー展開可能である。

定理２． 関数$f(x)$とエルミート補間多項式$P_\ell(x)$は定理１と同じものとする。このとき、

$$\lim_{\ell\to\infty} P_\ell(0)=\frac{\alpha(0)+\beta(-0)}{2}$$

となる。

定理３． 関数$f(x)$とエルミート補間多項式$P_\ell(x)$は定理１と同じものとする。このとき、$f(x)$の 2 点テイラー展開は項別微分可能である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

(1) K. Kitahara, T. Yamada, K. Fujiwara, A Note on Two Point Taylor Expansion II, to appear in International Journal of Pure and Applied Mathematics, 86(2013), 採録決定, 査読有.

(2) K. Kitahara, T. Chiyonobu, H. Tsukamoto, A Note on Two Point Taylor Expansion, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 75(2012), 327 – 338, 査読有.

(3) Y. Nishino and K. Kitahara, Functions approximated by any sequence of interpolating generalized polynomials, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 64(2010), 411 – 420, 査読有.

〔学会発表〕（計２件）

(1) K. Kitahara, T. Chiyonobu and H. Tsukamoto, A note on two point Taylor expansion, August 22-26(23), 2011, Paul Turán Memorial Conference Budapest, Hungary.

(2) Y. Nishino and K. Kitahara, Functions approximated by any sequence of interpolating generalized polynomials, June 3 – 10(8), 2010, International Conference "Constructive Theory of Functions", Sozopol, Bulgaria.

〔その他〕

ホームページ等

http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~kitahara/main/study2000-.html

６．研究組織

(1)研究代表者

北原　和明（KITAHARA KAZUAKI）

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：40195277

(2)研究分担者

地道　正行（JIMICHI MASAYUKI）

関西学院大学・商学部・教授

研究者番号：60243200