

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 7 日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540163

研究課題名（和文） KdV方程式系のエルゴート理論的研究

研究課題名（英文） Study of KdV hierarchy from ergode theory

研究代表者

小谷 眞一 (KOTANI SHINICHI)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：10025463

研究成果の概要（和文）：Segal-Wilson による佐藤のグラスマン多様体の方法の解釈を，無反射ポテンシャル全体の空間の閉包上に適用し，KdV 力学系を構成した．その際重要になる部分空間の正值性の概念を導入し，その上で τ 関数の非退化性を示した．さらに生成要素及び生成要素に作用する群を表現するモノドロミー行列を導入し，シフト変換に対する Remling の定理を KdV 力学系に拡張した．これにより KdV 力学系の不変部分集合の特徴付けが可能になった．

研究成果の概要（英文）：Segal-Wilson's interpretation of Sato's grassmann manifold method was applied to the closure of the space of all reflectionless potentials, and a KdV flow on it was constructed. In the construction a notion of positivity of subspaces was introduced and used to show the non-degeneracy of the τ -function. Remling's theorem on shift flow was extended to the KdV flow by introducing generating functions and monodromy matrices describing the group action on the generating functions, which made it possible to characterize invariant subsets of the KdV flow.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：ランダムスペクトル，力学系，可積分系

1. 研究開始当初の背景

ソリトン乱流を構成することを目標にして，無反射ポテンシャルの閉包上に KdV 力学系を構成することからこの研究を開始した．当初はガウス系の2次元関数を使う確率論的な方法を思いついたが，それでは一方の

軸で減少する回しか表せないことがわかり，別の方法を探したところ，R.Johnson が Segal-Wilson による佐藤の方法の解釈を無反射ポテンシャルの閉包上に提要している論文を見つけ，その方法を利用することにした．しかし，厳密な基礎づけにはいろいろな

点を克服する必要がある、本計画はその基礎づけから開始した。

2. 研究の目的

研究の目標を

- (1) KdV 力学系を利用し、シュレーディンガー作用素のスペクトルが絶対連続であるとき、そのポテンシャルの概周期性を示すこと
- (2) ソリトン乱流を表現する理想的な確率測度を KdV 力学系で不変な確率測度として導入すること

の2点において研究計画を立てた。当初の計画においては(2)のみを上げていたが、KdV 力学系の構成が概周期性の証明に有用なことは、有限次元の力学系において積分が十分の数あればその力学系は準周期的であるという古典的な結果より明らかであるので、

(1)を追加した。

したがって、この研究の目的は、

- (1) 有限次元可積分系における準周期性の結果を無限次元の可換な力学系にまで拡張したいという数学的な期待を実現すること。
- (2) 物理的に存在が予想されてソリトン乱流を数学的に構成すること

の2点である。

3. 研究の方法

KdV 力学系の構成には Segal-Wilson の方法を適用する。Segal-Wilson では KdV 力学系の構成そのものに重点を置いているが、本計画では、対応するシュレーディンガー作用素のスペクトルに関心があるので、Segal-Wilson の理論をスペクトル論の立場から構成しなおす必要がある。そのためには

- (1) 無反射ポテンシャルの空間の閉包上で τ 関数が退化しないことを示す。
- (2) Weyl-Titchmarsh 関数を導入し、その群作用での変化を記述する方法を見出す。

などの理論の基礎部分を整備する。構成される KdV 力学系は無数個の可換な力学系からな

っている。対応するシュレーディンガー作用素のスペクトルの絶対連続性の条件下で適当なコンパクト性の条件を見出し、ポテンシャルの概周期性を示す。ポテンシャルの概周期性に関しては Sodin-Yudituki による Parreau-Widom 型リーマン面上のハーディ空間論を使う精緻な結果がある。ここでは、対象としている絶対連続スペクトル部分が持つ性質をできるだけ一般的な条件にして、概周期性のための本質的な部分を抽出したい。

ソリトン乱流については、Molchanov らによる物理的な考察があるが、その論文は、アイデアはあるものの、数学的な意味で証明された結果ではない。ここでは構成された KdV 力学系を利用して、確率論的な考察により、ポアソン測度的あるいはガウス測度的な KdV 力学系不変な確率測度を見出す。

4. 研究成果

本研究者は2008年に KdV 力学系の構成についての論文を発表しているが、基本的な部分で間違いがあることを発見した。それで基本的な部分の再考察が必要になった。「研究方法」で述べた理論の基礎づけに関しては以下のことを示した。

- (1) 部分空間の生成関数(2つの正則関数の組)の概念を導入し、2つの正則関数の組が生成関数になるための簡潔な必要十分条件を与えた。
- (2) 生成関数により、Weyl-Titchmarsh 関数を定義した。さらに生成関数に対して群作用を記述するモノドロミ行列を導入した。その際モノドロミ行列が作用する群の元(ゼロ点を持たない正則関数)が正則な範囲では正則になることを示した。
- (3) 部分空間の正值性の概念を導入し、無反射ポテンシャルの閉包に属するポテンシャルに対応する部分空間は正值性を持つことと、部分空間が正值性を持つときは τ 関数が非退化で

あることを示した。これにより KdV 力学系が無反射ポテンシャルの閉包上に構成できる。

これらの基礎のもとに第 1 番目の目標の研究に進んだ。しかし、ポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素が 1 つの絶対連続スペクトルを持つ KdV 力学系不変集合に関して、群の作用が推移的であることを示すことができず、この目標の達成は未完成に終わっている。また第 2 の目標に対しては取り掛かる時間がなかった。

一方、この期間中に Remling がポテンシャルのシフトに関する極限ポテンシャルは、元のポテンシャルに対するシュレーディンガー作用素の絶対連続スペクトル部分で無反射になるという驚くべき結果を示した。

Remling の定理: $q(x)$ を実数値の可測関数とし、無限に発散する t_n に対して $q_n(x) = q(x+t_n)$ とする。 q_n がある q_* に収束するとする。 q をポテンシャルにもつシュレーディンガー作用素を $H(q) = -d^2/dx^2 + q$ とし、 $H(q)$ のスペクトルがある集合 A 上で絶対連続とすると、 q は A 上無反射である。つまり m_+ , m_- をそれぞれ $H(q_*)$ の右及び左 Weyl-Titchmarsh 関数とすると $m_+(x+i0) = -m_-(x+i0)^*$ が A 内の x に対して成り立つ。

A が区間である場合には、 A 上の無反射性は m_+ , m_- が区間を超えて解析接続可能であることを示しており、この場合には q_* に対して強い制限がつくことになる。特に A が有限個の区間からなり、 $H(q_*)$ が A 以外でスペクトルを持たない場合には q_* はコンパクト・リーマン面上のテータ関数で表される代数幾何的な関数になる。

この定理の証明方法をよく検討すると、シフトにより生じるモノドロミー行列が一次分数変換として Weyl-Titchmarsh 関数に作用しているが、その一次分数変換が上半平面を上半平面に移す性質が基本になっていることに気づいた。 KdV 力学系が 1-パラメータ

群でできているときに、その無限小生成元に相当する行列がある意味で正值性を持てば、モノドロミー行列が上半平面を上半平面に移すことを示し、 Remling の定理を KdV 力学系に拡張することができた。これにより KdV 力学系の極小閉不変部分集合の構造について一般的な結果を得ることができる。また、 KdV 方程式において初期値が減少しない場合でも、時間の無限大での解の挙動について結果を得ることができた。特に初期関数をポテンシャルに持つシュレーディンガー作用素のスペクトルがある半無限区間からなりそこで絶対連続ならば、時間無限大で定数に収束することがわかる。またスペクトルが有限個の区間からなり、そこで絶対連続になるときには極限は代数幾何的な関数のなることもわかる。

この結果はしかし、初期関数が無反射ポテンシャルの閉包に属する場合しか示せていない。一般の初期関数に対しても成立することが期待されるが、そのような関数に対して KdV 方程式が一意的な解を持つことは知られていないので、今のところ予想でしかない。また KdV 方程式と同様なカテゴリーに分類されている、戸田方程式、非線形シュレーディンガー方程式などにもこの方法が適用できることが予想されるが、今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

① 小谷眞一, 中野史彦; On the level statistics problem for the one-dimensional Schrödinger operator with random decaying potentials, 査読あり, 数理解析研究所講究録別冊に掲載決定, 2013

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/besatsu-j.html>

② 小谷眞一; Krein's strings whose spectral functions are of polynomial growth, 査読あり, Kyoto Journal of Mathematics に掲載決定, 2013

<http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&page=past&handle=euclid.kjm>

③ 小谷眞一; Grassmann manifold and spectral theory of 1D Schroedinger operators, 査読なし, 素粒子論研究・電子版 Vol 10 (2011) No 1, 50-79,

http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~sokened/sokendenshi/vol10/yitp10_proc.pdf

④ 小谷眞一, 鍛冶俊介; Financial inverse problem and reconstruction of infinitely divisible distributions with Gaussian component, 査読あり, Finance and Stochastics, on line 18 Feb. 2011, 1-18

<http://link.springer.com/journal/780>

⑤ 小谷眞一, Pham Van Quoc; On asymptotics of eigenvalues for a certain 1-dimensional random Schroedinger operators, 査読あり, Osaka journal of Mathematics, vol.48, 2011, 69-89

<http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.ojm>

⑥ 小谷眞一; On limit behavior of eigenvalues spacing for 1-D random Schroedinger Operators, 査読あり, 数理研講究録別冊B27, 2011, 67-78

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/besatsu-j.html>

[学会発表] (計 7 件)

① 小谷眞一; A random Jacobi matrix arising from beta-ensemble, 研究集会「ランダム作用素のスペクトルと関連する話題」2012年12月6日, 京都大学

② 小谷眞一; Grassmann manifold and spectral theory of 1D Schroedinger operators, Mini courses and Workshop Hilbert spaces of entire functions and spectral theory of self-adjoint differential operators, CRM バルセロナ(スペイン)2011年5月30,31日,6月1日

③ 小谷眞一; Infinite dimensional Grassmann manifold on L^2 and 1-D Schroedinger operators, CRM weekly seminar, CRM バルセロナ (スペイン) 2011年3月10日

④ 小谷眞一; 固有値間隔の極限分布について, ランダム作用素のスペクトルと関連する話題, 慶応大学, 2010年12月9日

⑤ 小谷眞一; 佐藤の可積分系理論の1次元ランダムシュレーディンガー作用素, 基礎研究会「量子科学における双対性とスケール」, 京都大学, 2010年11月4日

⑥ 小谷眞一; 1次元系の絶対連続スペクトルと可積分系, Summer School 数理物理2010:「ランダムシュレーディンガー作用素」, 東京大学, 2010年8月27,28日

⑦ 小谷眞一; KdV flow on the space of generalized reflectionless potentials, The 2nd St.Petersburg Conference in Spectral Theory, Euler International Mathematical Institute (Russia), 2010年7月15日

[その他]

ホームページ等

<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~kotani/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小谷 眞一 (KOTANI SHINICHI)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号: 10025463