

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月31日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540169

研究課題名（和文）熱方程式・波動方程式の解を保つ変換の研究

研究課題名（英文）The research of transformations which preserve the solutions of the heat equation and the wave equation.

研究代表者

下村 勝孝 (SHIMOMURA KATSUNORI)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：00201559

研究成果の概要（和文）：熱方程式は温度分布の変化を表す方程式，波動方程式は波を表す方程式で，どちらも物理学に由来し数学においても極めて重要である．この研究では，熱方程式の解を保つ変換の研究の今後の進展に必要となる，一定符号でない計量に対する等角写像，及び対応する双曲型方程式の解を保つ変換を具体的に調べた．変換の集合の構造を詳しく調べ，次元が3以上の場合には変換の集合，変換の具体的な形，を決定することが出来た．

研究成果の概要（英文）：In this research, we studied the conformal mapping for general indefinite metric on semi-euclidean spaces, and the transformation which preserve the solutions of the associated hyperbolic equation. We determined the set of mappings and transformations, and also their explicit forms.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：熱方程式の解を保つ変換, Appell 変換, 波動方程式の解を保つ変換, バイトマン変換

1. 研究開始当初の背景

従来，調和関数を保つ変換の研究は，Harmonic morphism という形で，特にリーマン多様体上で，偏微分方程式，微分幾何，ポテンシャル論の各側面から，活発に研究されている．一方で，熱方程式の解を保つ変換については，古典的な Appell 変換だけがよく知られ，熱方程式の解の研究，特に正值解の研究に大きな役割を果たしてきたが，Leutwiler が注意するまでは何も一般的考察は行われていなかった．リーマン多様

体，半リーマン多様体の場合にも一般的な特徴付けも含め何も知られておらず，ユークリッド空間の場合も，次元が異なる場合には何も知られていなかった．

以上の研究動向の中で本研究，熱方程式の解を保つ変換の研究を始めた．熱方程式の解を保つ変換については，Leutwiler が次元の等しいユークリッド空間の場合を扱った研究があるのみであり，本研究は新しいテーマを開くものである．また本研究は，応用を意識して変換の具体的な形を求める

ことを目標とする点で、調和関数を保つ変換の場合の研究よりも一歩踏み込んだものである。

これまでにユークリッド空間上の熱方程式の解を保つ変換と、平行してリーマン多様体、半リーマン多様体上の熱方程式の解を保つ変換についても研究し、これまでに大きな進展があった。

次元が異なるユークリッド空間の間の変換について、写像が時間座標毎には多項式写像で、かつ時間座標の変換が実解析的である場合に、変換の形を具体的に、完全に決定し、それらは全て Appell 変換の直和であることを示した。

一方で、Appell 変換を、半ユークリッド空間の場合にも拡張して、次元が等しい場合に変換の形を、具体的に完全に決定した。結果は、双方の空間の計量の型が同じまたは反対でなければならず、変換は全て、相似変換と、Appell 変換と、反転との合成で書ける、というものである。

リーマン多様体、半リーマン多様体上の間の熱方程式の解を保つ変換については、最初に一般論として、ユークリッド空間の場合を拡張する形で変換の特徴付け定理を得た。

一般論に関連して、多様体上の変換について、リーマン多様体の場合と半リーマン多様体の場合の違いを明らかにするために具体例を考察し、半リーマン多様体上の熱方程式を保つ変換で、時間変数の向きが逆転する例と、時間変数の変換と空間的拡大率が空間変数に依存する例を発見した。この結果により、変換の性質の中で「時間変数変換と空間拡大率が空間変数に依存しない」と「時間変数の向きは不変」とは、多様体のラプシアンが楕円型であることよることが分かった。また、多様体の張力場との関係を調べ、変換の特徴付けの方程式が、重み付き張力場による熱方程式と同じであることが分かった。

次いで、リーマン多様体の具体的な場合として、原点を除いたユークリッド空間の動径方向リーマン計量に関する熱方程式を保つ変換を調べ、一般の回転不変なリーマン計量の場合と関連付けて調べた。Appell 変換の直接の拡張の場合には、具体的に形を決定した。その中に、ユークリッド空間では存在しない興味深い例を得た。

半リーマン多様体の場合の具体的な重要例として、計量退化集合を除いた半ユークリッド空間の動径方向半リーマン計量に関する熱方程式の解を保つ変換を調べ、Appell 変換の直接の拡張の場合に、形を決定することができた。また、諸係数をうまく選べば、Appell 型変換の間には、計量のべき指数によって連続的にパラメータ付けが出来る

ことが判った。

それらの結果を元に、3次元以上の場合には、ユークリッド空間上の回転不変計量に関する、熱方程式の解を保つ変換を完全に決定出来た。

その後、ユークリッド空間上の回転不変計量に関する結果を、半ユークリッド空間に対して拡張することを考えた。最初にローレンツ空間を考え、Liouville の定理を拡張した。その結果、波動方程式の解を保つ変換を決定することが出来た。

そこで熱方程式に加えて、波動方程式及びその一般化に対しても解を保つ変換の研究を行うことにした。

2. 研究の目的

本研究の目的は、熱方程式・波動方程式の解を保つ（熱方程式の解を再び熱方程式の解に写す、または波動方程式の解を再び波動方程式の解に写す）変換に関する問題を、ポテンシャル論と実解析的手法を用いて、さらに広く深く、新しい進展を得ることである。研究分担者が各自で専門分野での研究を進めながら、「変換の形を具体的に決定する」をキーワードにして、有機的関連を持つ共同研究を行う。得られた具体的な変換を用いて、領域を別の領域に写像し、熱方程式のマルチン境界、熱方程式の解の境界挙動や拡張可能性に応用することも目的としている。

3. 研究の方法

今回はユークリッド空間上の回転不変計量に関する熱方程式の解を保つ変換を決定した結果を、半ユークリッド空間に対して拡張するために、その基本的道具となる、半ユークリッド空間上の超双曲型方程式やその一般化の解を保つ変換について調べた。その方法として、Liouville の定理を拡張して等角写像について調べた。そのために前の研究で得た、波動方程式の解を保つ変換で現れた個々の変換を一般化する必要が生じ、波動方程式の解を保つ変換全体がなす集合の構造について調べ、特に変換の間に成り立つ関係式、変換の族の有効なパラメータ付け、スケーリングや極限移行などを詳しく調べて、その結果を用いて、変換を一般化するという方法で研究を進めた。

4. 研究成果

ユークリッド空間上で、波動方程式の符号数を変えた超双曲型方程式の解を保つ変換を熱方程式、波動方程式の解を保つ変換と同じ形で定式化し、3次元以上の場合に形を完全に決定した。結果は、全ての変換は、相似変換か、反転変換と相似変換の合成か、ペイトマン型変換と相似変換の合成になる、

というものである。波動方程式の解を保つ変換の場合と同じく、ローレンツ計量から符号数を変えた計量に対する等角写像を決定する問題に帰着するが、ローレンツ計量の場合のペイトマン変換に相当する写像を見つけることが出来て、波動方程式と同じ手法が使えた。

次元が3以上のユークリッド空間上で、超双曲型方程式の解を保つ変換全体がなす集合の構造を解明し、相似変換、反転変換、ペイトマン変換の間の関係を明らかにすることが出来た。前記の結果から、解を保つ全ての変換は、相似変換と反転変換とペイトマン型変換の合成で書けるが、実は合成する変換の個数を増やせば、相似変換と反転変換のみ、あるいは相似変換とペイトマン型変換のみでも、全ての変換を書くことが出来ることが判った。相似変換と反転変換のみの合成では、調和関数を保つ変換の場合と同じ構造になりそうだが、非定値計量空間には計量が0だが0ベクトルではないベクトルが存在するため、異なった構造になっている。

波動方程式を保つペイトマン変換を、ローレンツ計量の相似変換と反転変換の合成で書く関係式をもとにして、次元が3以上のユークリッド空間上の任意の非退化非定値計量に対して、ペイトマン変換の定義、及び相似変換や反転変換との関係式、を一般化した。

一般の非退化非定値計量に対して定義したペイトマン変換は、計量が0だが0ベクトルではないベクトルでパラメータ付けできるが、ペイトマン変換の定義式でパラメータを計量も0でないベクトルにとると、反転変換と折返し変換と相似変換の合成になる。そこでパラメータを計量が0になるように極限を取ると、うまくスケールすれば極限変換はペイトマン変換になること、つまりペイトマンは折返した反転変換をスケールしながら平行移動した極限になっていることがわかった。

非定値計量に対して等角写像を決定して、相似変換、反転変換、ペイトマン変換の写像の合成で具体的に表示することが出来た。その結果を用いて、計量に付随する一般の2階定数係数齊次線型偏微分方程式の解を保つ変換全体がなす集合の構造を解明し、相似変換、反転変換、ペイトマン変換の合成で具体的に表示した。結果を現在論文にまとめているところである。

今後は、この結果を用いて、次の目標である、ユークリッド空間上の回転不変計量に関する熱方程式の解を保つ変換を決定した結果を、半ユークリッド空間に対して拡張することに取り組む予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計13件)

- ① 下村勝孝, Generalizations of Bateman's transformation for general indefinite metrics, Mathematical Journal of Ibaraki University, 45, 印刷中, 2013, 査読有.
- ② 菱川洋介, 西尾昌治, 山田雅博, Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type, Journal of the Mathematical Society of Japan. 65, 487-520, 2013.4, 査読有.
<http://projecteuclid.org/euclid.jmsj/1366896642>
- ③ 西尾昌治, 鈴木紀明, 山田雅博, Positive Toeplitz operators of finite rank on the parabolic Bergman spaces, Kodai Mathematical Journal, 36, 38-49 2013.3, 査読有.
<http://projecteuclid.org/euclid.kmj/1364562716>
- ④ 堀内利郎, Peter Kumlin, On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg-type inequalities involving critical and supercritical weights, Kyoto Journal of Mathematics, 52, 661-742, 2012. Winter, 査読有.
<http://projecteuclid.org/euclid.kjm/1352987531>
- ⑤ 安藤広, 堀内利郎, Missing terms in the weighted Hardy-Sobolev inequalities and its application, Kyoto Journal of Mathematics, 52, 759-796, 2012. Winter, 査読有.
<http://projecteuclid.org/euclid.kjm/1352987533>
- ⑥ 下村勝孝, A relation between the Lorentzian inversion and the Bateman transformation, Mathematical Journal of Ibaraki University, 44, 1-5, 2012, 査読有.
<http://ir.lib.ibaraki.ac.jp/handle/10109/3540>
- ⑦ 西尾昌治, 鈴木紀明, 山田雅博, Schatten class Toeplitz operators on the parabolic Bergman space II, Kodai Mathematical Journal. 35, 52-77, 2012.3, 査読有.
<http://projecteuclid.org/euclid.kmj/1333027254>
- ⑧ 下村勝孝, Liouville type theorem associate with the wave equation, Mathematical Journal of Ibaraki University, 43, 51-64, 2011, 査読有.

<http://ir.lib.ibaraki.ac.jp/handle/10109/2780>

- ⑨ 下村勝孝, Caloric morphisms between different radial metrics on semi-euclidean spaces of same dimension, Mathematical Journal of Ibaraki University, 43, 13-41, 2011, 査読有.

<http://ir.lib.ibaraki.ac.jp/handle/10109/2778>

- ⑩ 西尾昌治, 下村勝孝, Caloric Morphisms for rotation invariant metrics, Hiroshima Mathematical Journal, 43, 315-331, 2010.11, 査読有.

<http://projecteuclid.org/euclid.hmj/1291818847>

[学会発表] (計5件)

- ① 西尾昌治, Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, 2013.2.4, International Workshop on Potential Theory
- ② 下村勝孝, 非正定値計量の等角写像について, 2011.11.4, 2011年度ポテンシャル論研究集会
- ③ 西尾昌治, 鈴木紀明, 山田雅博, 放物型ベルグマン空間上のランク有限正定値Toeplitz作用素について, 2011.11.4, 2011年度ポテンシャル論研究集会
- ④ 西尾昌治, 菱川洋介, 山田雅博, A remark on conjugate system on parabolic Bergman spaces, 2010.11.7, 2010年度ポテンシャル論研究集会
- ⑤ 下村勝孝, 非正定値計量の等角写像に対するLiouville型の定理, 2010.11.6, 2010年度ポテンシャル論研究集会

6. 研究組織

(1) 研究代表者

下村 勝孝 (SHIMOMURA KATSUNORI)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：00201559

(2) 研究分担者

堀内 利郎 (HORIUCHI TOSHIO)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：80157057

西尾 昌治 (NISHIO MASA HARU)
大阪市立大学・理学研究科・准教授
研究者番号：90228156

安藤 広 (ANDO HIROSHI)
茨城大学・理学部・講師
研究者番号：60292471

(3) 連携研究者

鈴木 紀明 (SUZUKI NORIAKI)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：50154563