

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 27 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540172

研究課題名（和文）幾何学および解析的モノドロミーと局所ゼータ関数の研究

研究課題名（英文）Study of geometric and analytic monodromies and local zeta functions

研究代表者

竹内 潔 (TAKEUCHI KIYOSHI)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：70281160

研究成果の概要（和文）：モチヴィックミルナーファイバーの理論を用いて、多項式写像の無限遠点のまわりのモノドロミーのジョルダン標準型を記述する公式を得た。さらにこの結果を完全交叉多様体からの多項式写像の場合に一般化した。また急減少ホモロジーの理論を用いて、合流型 A-超幾何関数の積分表示を得た。それにより合流型 A-超幾何関数の無限遠点における漸近展開およびストークス係数を計算した。

研究成果の概要（英文）：By using the theory of motivic Milnor fibers, we obtained some formulas which express the Jordan normal forms of monodromies at infinity of polynomial maps. Moreover we generalized this result to the case of polynomial maps from complete intersection varieties. By using the theory of rapid decay homologies we also obtained the integral representations of confluent A-hypergeometric functions. By this result we calculated their asymptotic expansions and Stokes multipliers at infinity.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：代数解析

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：D-加群、超幾何関数、特異点理論、モノドロミー、偏屈層、ミルナー束

1. 研究開始当初の背景

研究代表者はこれまで、代数解析の手法を用いて偏微分方程式や特異点理論、Lefschetz型不動点公式、射影双対性、A-超幾何関数な

どを研究してきた。特にここ数年は連携研究者の松井優と共同で、構成可能層にたいするモノドロミーゼータ関数の理論を応用し、近年多くの研究者により研究されている多項式写像の「無限遠点のまわりでのモノドロ

ミー」(ファイバーの大域的な接続状況を表す)の研究を行った。そしてその際我々が用いたトーリックコンパクト化の手法をモチヴィックミルナーファイバーの理論と組み合わせることで、多項式写像の無限遠点のまわりでのモノドロミーのジョルダン標準型が多項式のニュートン多面体で記述できるのではないかと着想するに至った。また Gelfand-Kapranov-Zelevinsky の導入した A-超幾何関数(A-超幾何微分方程式の正則関数解)の解析接続の構造(モノドロミー)の研究の過程で、さらに一般の Adolphson の導入した合流型 A-超幾何関数の研究にも強い関心を持った。特にその積分表示や大域的な性質などがほとんど未解明であったことから、それらの問題を D-加群の理論を用いて是非解決したいと考えるようになった。さらに、当時大学院生だった岡田季久との共同研究で得られた局所ゼータ関数の極を精密に調べる方法を、p 進体上の多項式の井草ゼータ関数の場合にも拡張できるのではないかと考えた。

2. 研究の目的

多項式写像の無限遠点におけるモノドロミーについては、そのべき零部分すなわちジョルダン標準型を多項式のニュートン多面体を用いて具体的に記述する公式を求める。また多変数の超幾何関数に関しては、(不確定特異点を持つ)合流型 A-超幾何関数の積分表示とそのモノドロミーや漸近展開などへの応用を目指す。前に岡田季久と発見した局所ゼータ関数の極を精密に調べる方法を p 進体上の多項式の井草ゼータ関数の場合にも拡張する。さらにこれらの研究の上に立って、特異点理論における最も深遠な未解決問題の1つであるモノドロミー予想を考察する。

3. 研究の方法

多項式写像の無限遠点におけるモノドロミーについては、これまでの研究で用いたトーリックコンパクト化の手法を用いて、まずそのジョルダン標準型の計算をモチヴィックミルナーファイバーの群作用付きの(同変)混合 Hodge 数の計算に帰着した。そして Danilov-Khovanski の研究を群作用付きの場合に拡張することで、後者を多項式のニュートン多面体の面の体積やその中の格子点の数で記述した。これにより、無限遠点におけるモノドロミーのジョルダン標準型の公式が得られた。そしてこの結果を(非退化な)完全交叉代数多様体上の多項式にも

一般化した。また合流型 A-超幾何関数の積分表示の研究においても、同様のトーリックコンパクト化が非常に役立った。すなわちある代数的トーラスのトーリックコンパクト化の上で、Hien による急減少ホモロジーが定義可能になる。そしてこの急減少ホモロジーサイクルを積分路とすることで、我々の求めていた合流型 A-超幾何関数の積分表示の公式が得られた。さらにねじれホモロジーに対するねじれモース理論を用いることで、この積分路の空間の良い基底が構成でき、それに高次元鞍点法(最急降下法)を適用することで合流型 A-超幾何関数の無限遠点における漸近展開を精密に求めることができた。これにより合流型 A-超幾何関数の(複素直線への制限の)無限遠点におけるストークス直線、ストークス係数、モノドロミーも計算できることがわかった。また局所ゼータ関数の極を調べる方法を p 進体上の多項式に拡張する研究に関しては、試験的な計算をいくつか行った。

4. 研究成果

(1) 研究の主な成果

多項式写像の無限遠点におけるモノドロミーについては、混合 Hodge 加群とモチヴィックミルナーファイバーの理論を用いることで、そのジョルダン標準型を多項式のニュートン多面体を用いて表示する公式を得ることに成功した。副産物として、局所モノドロミーの場合に Steenbrink 予想として有名だった Hodge スペクトラムについての結果の大域版が得られた。また局所的なモノドロミーについても、同じ方法でほとんどの場合にジョルダン標準型を完全に計算できるようになった。さらにこれらの結果を、完全交叉代数多様体上の多項式のモノドロミーの場合にも拡張することに成功し、多くの結果が並行して成り立つことを示した。研究期間の最終年度には、これまで無限遠点におけるモノドロミーの研究において常に仮定してきた「無限遠点において従順」という多項式の条件も多くの場合に外すことに成功した。関連して多項式写像の分岐点集合を研究し、Nemethi-Zaharia の仕事を多項式写像の値域が高次元の場合に一般化した。すなわち多項式写像の分岐集合をニュートン多面体を用いて記述する一般的な公式を得た。多変数の超幾何関数の研究においては、Hien による急減少ホモロジーの理論を用いて合流型 A-超幾何関数の積分表示の公式を確立し、Gelfand らの結果を一般化した。さらにねじれモース理論を用いて積分路を具体的に構成することにより、合流型 A-超幾

何関数の無限遠点における漸近展開も非常に精密に求めることに成功した。以上の結果により、合流型 A-超幾何関数の(複素直線上への制限の)無限遠点におけるストークス直線、ストークス係数、モノドロミーも求めることができた。

(2) 得られた成果の国内外における位置づけとインパクト

多項式写像の無限遠点におけるモノドロミーについては、これまでの研究ではその固有値を求めることしかできなかつた。しかし我々はそのジョルダン標準型を完全に求めることができた。特に完全交叉代数多様体上の多項式のモノドロミーの研究はさらに困難であり従来の研究ではまったく未解明であったが、我々の研究により多くの場合にそのジョルダン標準型をニュートン多面体を用いて具体的に計算することが可能になった。また合流型 A-超幾何関数の積分表示を確立しその大域的な性質を解明することは、この分野の長年の懸案であった。我々は積分表示の公式を確立し、無限遠点における漸近展開の計算に応用しその大域的な性質の解明に寄与した。我々の積分表示は Bessel 関数や Airy 関数などの古典的な合流型超幾何関数の積分表示を自然に多変数化したものになっており、今後さらなる応用が期待できる。

(3) 今後の展望

多項式写像のファイバーの幾何学的モノドロミーに関しては、我々の研究により無限遠点におけるモノドロミーについて非常に詳しい情報が得られた。さらに進んでその基本群の表現としての全体像を決定することは、非常に重要な課題であると思われる。その研究のためには、写像のモース化や Picard-Lefschetz 理論の精密化などが今後必要になると考えている。また合流型 A-超幾何関数のモノドロミーについては、その多くの部分が依然として未解明のままである。我々の得た積分表示を用いてその全容の解明に向けさらに努力していきたい。我々の発見した実数体上の多項式に付随する局所ゼータ関数の極を精密に調べる方法を p 進体上の多項式の場合に拡張する研究では、まだ十分な成果が得られていない。これについてはずっと良い結果が得られるよう引き続き努力を重ねていきたい。そして特異点理論における最も重要な課題の一つであるモノドロミー予想の解決にも寄与したいと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① 竹内 潔、岡田 季久, Meromorphic continuations of local zeta functions and their applications to oscillating integrals, *Tohoku Math. Journal*, 査読有, (2013): 印刷中.
- ② 竹内 潔、松井 優, Monodromy at infinity of polynomial maps and Newton polyhedra (with Appendix by C. Sabbah), *Int. Math. Res. Not.*, 査読有, Vol. 2013, No. 8 (2013): 1691-1746. DOI: 10.1093/imrn/rns092
- ③ 竹内 潔、A. Esterov, Motivic Milnor fibers over complete intersection varieties and their virtual Betti numbers, *Int. Math. Res. Not.*, 査読有, Vol. 2012, No. 15 (2012): 3567-3613. DOI: 10.1093/imrn/rnr154
- ④ 竹内 潔、松井 優, A geometric degree formula for A-discriminants and Euler obstructions of toric varieties, *Advances in Mathematics*, 査読有, Vol. 226 (2011): 2040-2064. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870810003476>
- ⑤ 竹内 潔、松井 優, Milnor fibers over singular toric varieties and nearby cycle sheaves, *Tohoku Math. Journal*, 査読有, Vol. 63 (2011): 113-136. DOI: 10.2748/tmj/1303219938
- ⑥ 竹内 潔、松井 優, Monodromy zeta functions at infinity, Newton polyhedra and constructible sheaves, *Mathematische Zeitschrift*, 査読有, Vol. 268 (2011): 409-439. DOI: 10.1007/s00209-010-0678-5

[学会発表] (計 2 2 件)

- ① 竹内 潔, Confluent A-hypergeometric functions and rapid decay homology cycles, アクセサリー・パラメーター研究会, 2013年3月15日, 熊本大学理学部

- ② 竹内潔, 合流型 A-超幾何関数の積分表示と漸近展開, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 2012年12月6日, 京都大学大学院理学研究科
- ③ 竹内潔, Monodromies at infinity of tame and non-tame polynomials, Workshop on Free Divisors and Differential Equations, 2012年11月6日, 東京農工大
- ④ 竹内潔, Monodromies at infinity of tame and non-tame polynomials, Topology of real singularities and motivic aspects, 2012年10月1日, MFO, Oberwolfach (ドイツ)
- ⑤ 竹内潔, A-discriminants and A-hypergeometric functions, 第4回日豪特異点研究集会, 2011年11月22日, 兵庫教育大学神戸サテライト
- ⑥ 竹内潔, On confluent A-hypergeometric functions, 関口次郎教授還暦記念集会, 2011年9月22日, 東京大学数理学研究科
- ⑦ 竹内潔, Motivic Milnor fibers and their virtual Betti numbers, 第6回日仏特異点シンポジウム, 2011年9月7日, 福岡西新プラザ
- ⑧ 竹内潔, Motivic Milnor fibers and Newton polyhedra, Singularity theory conference, 2011年7月26日, 中国科学技術大学 (中国、合肥)
- ⑨ 竹内潔, Motivic Milnor fibers, mixed Hodge modules and Newton polyhedrons, 研究集会「特異点と多様体の幾何学」, 2010年9月17日, 山形大学理学部

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹内 潔 (TAKEUCHI KIYOSHI)
筑波大学・数理物質系・教授
研究者番号：70281160

(2) 連携研究者

松井 優 (MATSUI YUTAKA)
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：10510026