

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：32661

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540175

研究課題名(和文) 集合値解析の手法を用いた非線形解析学の研究

研究課題名(英文) Nonlinear analysis using the technique of set-valued analysis

研究代表者

木村 泰紀 (KIMURA, Yasunori)

東邦大学・理学部・准教授

研究者番号：20313447

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円、(間接経費) 1,020,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では集合値解析等で用いられる現代的な手法によって非線形解析、とくに不動点問題や均衡問題等の凸解析に関連の深い問題の解析をし、解の存在や、解の近似法に関する研究をおこなった。実際の研究では、単調作用素のリゾルベントや非拡大写像を含む写像のクラスに対する不動点近似を中心に取り扱い、近似点列の有界性と解の存在との関係、点列の収束性等を考察し、新たな知見が得られた。さらに完備測地距離空間上の作用素に対する近似法も考察し、とくに曲率が正の値を上界に持つ空間の不動点近似について大きな成果があった。さらに、計算機実験を視野に入れ、誤差を含む点列生成に対する収束性についても重要な結果が得られた。

研究成果の概要(英文)：In this research, we deal with some nonlinear problems including fixed point problems and equilibrium problems, which are strongly connected to convex analysis, and consider the existence and approximation of the solutions to these problems. We focus our interest in the class of mappings which includes the resolvents of monotone operators and nonexpansive mappings and obtain some results concerning the relation between the boundedness of approximate sequences and the existence of the solution, and the convergence properties of the iterative schemes.

We also consider the iterative schemes of the operators defined on complete geodesic spaces. In particular, we obtain several considerable results for the space having a curvature bounded above by a positive number. Further we obtain some important results about the convergence properties of the schemes with errors related to the computer simulation.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：不動点問題 変分不等式 均衡問題 近似列 測地距離空間

1. 研究開始当初の背景

本研究課題では、非線形問題、すなわち、問題が設定される際に使用される写像が何らかの非線形性をもつ諸問題を研究対象とする。このような問題は数多くあるが、中でも均衡問題や凸最適化問題、不動点問題等の一連の問題については、主に凸解析学の手法を用いて解の存在性やさまざまな近似解の計算方法などが研究されており、本研究もこれらの既存研究を基礎として、より発展した内容について取り組むことを目的とした。

非線形問題の中で最も重要なものの一つとして、均衡問題がある。これはある空間の部分集合上で定義された2変数関数に対して定められる均衡点の存在や具体的な値を求める問題である。このような形式の問題は古くから研究されており、解の存在性等についてのさまざまな議論がなされていた。1994年にBlum-Oettliによって、一定の条件の下で均衡問題が不動点問題や凸最適化問題、鞍点問題等の応用上重要な問題の一般化となっていることが指摘されることにより、均衡問題の重要性が再認識された。それ以降も多くの論文によって解の存在や近似法の研究が盛んに進められていた。

均衡問題も含めた各種の非線形問題の相互関係の研究はこの分野における重要なテーマの一つであるが、均衡問題に関連する結果としては、本研究の代表者及び研究分担者らによる変分不等式問題との関係に関する研究がある。これは研究代表者の科研費補助金による研究(文部科学省科学研究費補助金若手研究(B)、課題名「集合値解析の手法を用いた均衡問題の研究」、課題番号19740065)でも取り扱った研究課題の一つであり、ある一般的な条件の下で均衡問題のクラスが変分不等式問題のクラスに含まれることを証明したものであった。

この研究によって、変分不等式問題に対する近似解法等の結果は一定の条件の下ではすべて均衡問題に適用できることが解明され、近似解法に関する研究の一つの突破口を開いた。このことは、さまざまな非線形問題間の相互関係を研究することによって近似解法等に関する研究が大きく飛躍できる可能性を示唆しており、本研究課題を遂行する上での大きなモチベーションとなっていた。

2. 研究の目的

本研究課題では、凸解析に関連の深い非線形問題、すなわち均衡問題、凸最適化問題、変分不等式問題、不動点問題、鞍点問題等を中心として、問題間の関係や解の近似法を明らかにし、計算機実験で利用可能な近似列生成法に関する知見を得ることを研究目的とする。具体的な内容は次の通りである。

(1)非線形問題間の相互的な関係の解明

既存の研究によって相互関係の存在が指摘されている上記の諸問題に対し、より詳細な考察をおこなうことによって、各非線形問

題のクラスの包含関係や同値性がどのような条件の下で実現されているのかを研究する。2008年に得られた均衡問題と変分不等式問題の関係に関する結果のように、各クラス間の相互関係がより明解な条件の下で実現されるというような発見が期待される。

(2)一般的に適用可能な解近似定理の証明

各非線形問題で個別に研究されている解の近似定理は、各問題の相互関係の解明が進むことによって、より広範な範囲への適用可能性が期待される。また一方で、個別に得られていた近似定理を統一した形でまとめることも可能になり得る。本研究ではこれらの考察を進めることで、多くの問題に適用可能であり、かつ理論的にも収束性等の有効性が保証された近似定理を得ることを目標とする。なお、次項にある計算機実験からのフィードバックも有効な近似定理を得るための強力な手段である。

(3)計算機実験による有効性評価

理論的には解への収束が保証された近似法も、実際に計算してみると収束速度や誤差による不安定化などで実用には耐えられない場合がある。本研究ではそのような事態を避けるために、計算機実験等によって現実の非線形問題の近似解を求めてみることによってその有効性を検証する。検証結果から考察される改善点は近似定理の研究にフィードバックし、定理の仮定の再検討等に利用される。このような研究手法により、実際の問題に対してより強力な解の近似定理の開発が期待される。

3. 研究の方法

本研究を遂行するにあたっては、全体の問題を分割することによって個別の目標を挙げ、それらを整理することで研究全体を大きく三つの段階に分けて考えた。一つは非線形問題間の相互関係をもとに、統一的な解の近似法を開発する研究であり、もう一つは完備測地距離空間等の、近年注目を集めつつある空間での非線形問題およびその近似解法の研究である。これらに計算機実験をするための近似定理の評価及び改良の考察が続く。基本的にはこの通りの順序で進められていくが、並行して進める部分も多く、またそれぞれの段階から前段階へのフィードバックも重要である。

以下に具体的な方法を述べる。

(1)非線形問題の近似解法

2008年に得られた青山・木村・高橋の結果をもとに、均衡問題や変分不等式問題を含むより一般的な非線形問題の設定で、近似解法の開発に取り組んだ。主に凸解析の手法を用いた各種の問題の近似解法を研究し、既存の手法の精緻化とともに新しい手法の開発を試みた。集合値解析の手法を援用することを試み、理論的に収束が保証されるような数列の構成法を模索した。

(2) 測地距離空間での非線形問題研究

従来から研究されているバナッハ空間やヒルベルト空間など、関数空間を含む空間での非線形問題の解法を参考に、幾何学的な色合いの強い完備測地距離空間での非線形問題を研究した。近似解法に関する様々な結果を得るには有限次元の幾何学のセンスが必要となるため、幾何学を専門とする研究者の協力を仰ぎ、分野を超えての共同研究をおこなった。

(3) 計算機実験が可能な手法の開発

理論的に収束が保証されている近似法は各種あるが、計算誤差の評価において、計算機への実装が難しい側面を持つものが多く存在することを踏まえ、誤差の評価をより現実的な仮定にした上での近似列の性質解明を目指した。新たに開発した近似列生成法が実装に耐えられるかどうかの検証をおこない、適用可能な写像やパラメタの選択等について考察した。

上記の方法をもとに、実際の活動としては文献等を用いた理論研究、関連する研究者により研究打合せ国内学会や国際会議への参加と情報収集、計算機実験等をおこなった。

4. 研究成果

本研究課題の研究成果として、関連する項目をまとめると5項目に集約することができる。各項目について、以下で具体的な内容を説明する。

(1) 近似点列の相互関係の解明

非拡大写像の不動点近似法として知られている Halpern 型の点列生成法は、粘性項を導入することで種の変分不等式の解へと収束することが知られていた。一方、2001年に山田によって提案されたハイブリッド最急降下法は、強単調なりプシツ連続写像に対する変分不等式の解へと収束する点列生成であった。これらの事実を踏まえ、本研究課題では双方の点列生成法の類似点及び相違点を考察し、Halpern 型点列生成法に導入する粘性項にある種の摂動を加えたものがハイブリッド最急降下法による点列生成と同値になることを発見した。これにより、双方の点列生成を統一的に扱うことが可能となり、さまざまな点列生成を少数の定理に帰着できることが判明した。

(2) 新しい近似法の開発

近似点列の収束性に関する理論研究において、本研究で得られた注目すべき成果の一つとして、収縮射影法と Halpern 型の点列生成法とを組み合わせた、新しいタイプの点列構成法に関する収束定理がある。収縮射影法は、非拡大写像の不動点を近似する手法の一つで、2008年に高橋・竹内・窪田によってその強収束性が証明された。点列生成の際に距離射影を用いることで、比較的多くの写像に対して、収束の速さに関する優位性が期待される近似法である。しかしながら、距離射影

自身の計算には時間がかかる上、近似的にしか求めることができない等、計算機実装上の困難も存在する。本研究での結果は、これらの困難を克服するために、収縮射影法とは異なる近似法である Halpern 型近似の点列生成法に注目し、これらを組み合わせることによって、計算が容易な半空間への距離射影のみを用いた点列生成法を提案し、その強収束性を証明した。この結果は今後の本分野の研究において重要な役割を果たすことが期待できる。また、同様の結果をヒルベルト空間からバナッハ空間へと一般化した定理も既に証明が得られており、近日中に論文として発表する予定である。

(3) 近似列生成時の誤差に関する結果

上記の項目で触れた収縮射影法は、閉性をもつ擬非拡大写像の族に対する共通不動点近似法において最近の進歩が顕著である。本研究課題における第二の成果として、収縮射影法における計算誤差の考察が挙げられる。収縮射影法の点列生成において最大の難点である距離射影の計算は、上記の結果も含め、さまざまな形で困難を克服する方法が提案されているが、本研究課題では計算誤差がある程度大きくても生成点列は一定のよい性質を持つことを示した。通常、収縮射影法のような漸化式による点列生成では、一度計算誤差が発生するとそれ以降の生成点すべてに影響を及ぼすため、誤差が累積して問題が生じることが多い。そのため、過去の多くの研究では計算誤差に0への収束性や総和の有界性などを仮定することで点列の収束性を証明していた。しかしながら、そのような仮定は実質的に誤差が0であることを要求し、計算機実験等をおこなう際には非現実的な仮定であった。本研究で得た一連の結果は、計算誤差列の上界の値で生成点列の漸近不動点性を評価できることを示しており、計算機実験においても困難が生じない、より現実的な仮定となっている。さらに、この手法はヒルベルト空間やバナッハ空間の他にも定曲率のアダマール空間やヒルベルト球上の写像についても適用可能であることが判明している。

(4) 像回復問題の近似列の提案

非線形問題の一つに、工学への応用が可能な像回復問題がある。これは、空間内の与えられた閉凸集合族に対し、その共通部分内の点で、与えられた点から最も近い点を求める問題として定式化される。この問題に対し、本研究課題の研究手法を適用することで新たな知見を得ることができた。問題設定としてバナッハ空間上の閉凸集合族を採用し、空間の p -様凸性および双対写像の弱点列連続性を仮定することで、生成点列の強収束性を証明した。この結果の注目すべき特徴は、点列を生成する際の凸結合の取り方にある。バナッハ空間における点列生成では通常、双対写像の適用方法に注意を払う必要があるが、今回得られた定理では、従来のものとは

異なる形で双対写像を適用することによって、一般化射影を用いずに、より馴染み深い距離射影を用いた点列生成に成功したところにある。

(5) 完備測地距離空間における近似解法

研究開始当初は本研究課題で扱う内容に含めていなかった完備測地距離空間上の写像に対する研究であるが、2011年頃から主に不動点近似理論において急速な発展を遂げ、本研究課題でも研究対象として取り上げることになった。この空間に関連するもので本研究で得られた最初の結果は、アダマール空間に置ける閉凸集合列の収束と、それに対応する距離射影列との関係を考察したものである。この結果を応用することで、ヒルベルト球と呼ばれる特別なアダマール空間上の収縮射影法による近似列が、ヒルベルト空間やバナッハ空間等と同様に、解へと収束するという定理を導いた。さらに後続の論文では、正の定曲率をもつ完備測地距離空間に対しても同様の結果が成り立つことが示された。また、その他の点列生成法についても強収束やデルタ収束など、ヒルベルト空間の結果と並行した結論が得られることが新たな知見として得られているが、その証明は既存のものを単に書き換えるだけではなく、独自の証明手法を必要とすることが明らかになっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 31 件)

1. K. Aoyama and Y. Kimura, Viscosity approximation methods with a sequence of contractions, *Cubo, A Mathematical Journal* 16 (2014), 9-20. (査読有)
2. Y. Kimura and K. Nakagawa, Another type of Mann iterative scheme for two mappings in a complete geodesic space, *Journal of Inequalities and Applications*, 2014:72 (2014), 9 pages. doi:10.1186/1029-242X-2014-72. (査読有)
3. Y. Kimura, S. Saejung, and P. Yotkaew, The Mann algorithm in a complete geodesic space with curvature bounded above, *Fixed Point Theory and Applications* 2013:336 (2013), 13 pages. doi:10.1186/1687-1812-2013-336. (査読有)
4. Y. Kimura and K. Nakajo, The problem of image recovery by the metric projections in Banach spaces, *Abstract and Applied Analysis*, 2013 (2013), Article ID 817392, 6 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/817392>. (査読有)
5. Y. Kimura and K. Sato, Convergence of subsets of a complete geodesic space with curvature bounded above, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 75 (2012), 5079-5085. doi:10.1016/j.na.2012.04.024. (査読有)
6. K. Aoyama and Y. Kimura, Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011), 7537-7545. doi:10.1016/j.amc.2011.01.092. (査読有)
7. Y. Kimura, W. Takahashi, and J. C. Yao, Strong convergence of an iterative scheme by a new type of projection method for a family of quasinonexpansive mappings, *Journal of Optimization Theory and Applications* 149 (2011), 239-253. doi:10.1007/s10957-010-9788-9. (査読有)
8. Y. Kimura, Convergence of a sequence of sets in a Hadamard space and the shrinking projection method for a real Hilbert ball, *Abstract and Applied Analysis* 2010 (2010), Article ID 582475, 11 pages. doi:10.1155/2010/582475. (査読有)

[学会発表](計 35 件)

1. Y. Kimura, "Iterative methods for a family of mappings on a complete geodesic space", The International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (ICNAO2013), National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, December 22, 2013.
2. Y. Kimura, "On the shrinking projection method for mappings defined on a geodesic space", The Eighth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2013), Hirosaki University, Hirosaki, Japan, August 2, 2013.
3. Y. Kimura, "Approximation of a fixed point of an operator defined on a geodesic space", International Symposium on Applied Optimization and Game-Theoretic Models (ISAOGTM2013), Delhi, India, January 9, 2013.
4. Y. Kimura, "Approximation of a solution to a fixed point problem on a geodesic space", International Conference on the Theory, Methods, and Applications of Nonlinear Equations, Texas A&M University--Kingsville, Kingsville, TX, USA, December 17, 2012.
5. Y. Kimura, "Approximation of a common fixed point of quasinonexpansive mappings in a geodesic space", The 10th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications (ICFPTA2012), Cluj-Napoca, Romania, July 9, 2012.
6. Y. Kimura, "Shrinking projection method for a family of quasinonexpansive mappings on a real Hilbert ball", International Conference on Numerical Analysis and Optimization---Theory and Applications (NAOTA2011), Dhahran, Saudi Arabia,

December 19, 2011.

7. Y. Kimura, “On Mosco convergence for a sequence of subsets in Hadamard spaces”, The Seventh International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2011), Busan, Korea, August 3, 2011.
8. Y. Kimura, “Shrinking projection method for two different types of nonlinear mappings”, International Conference on Mathematical Analysis 2010 (ICMA2010), Bangkok, Thailand, December 7, 2010.
9. Y. Kimura, “Shrinking projection methods for nonlinear mappings”, The 4th International Conference on Fixed Point Theory, Variational Inequality and Its Approximation Algorithms, Chengdu, China, July 17, 2010.

〔その他〕

なし

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

木村 泰紀 (KIMURA, Yasunori)

東邦大学・理学部・准教授

研究者番号：20313447

(1) 研究分担者

青山 耕治 (AOYAMA, Koji)

千葉大学・法経学部・教授

研究者番号：20293152

飯塚 秀明 (IIDUKA, Hideaki)

明治大学・理工学部・准教授

研究者番号：50532280