**様式Ｃ－１９**

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月２０日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2010～2012
課題番号：22540181
研究課題名（和文）　ネバンリンナ理論の他分野への移植

研究課題名（英文）　Transplants of Nevanlinna theory to some fields of research

研究代表者
藤解　和也（TOHGE　KAZUYA）
金沢大学・電子情報学系・教授
研究者番号：30260558

研究成果の概要（和文）：主として平面上で定義された有理型函数の値分布に関する諸性質を記述する理論として知られている R. Nevanlinna による理論を、実数直線上で定義された区分的線型な連続関数の max-plus 代数に関する値分布論として移植することに成功した。それにより Nevanlinna 理論を適用して得られる複素常微分方程式の有理型函数解に関するいくつかの結果を超離散方程式の区分的に線形な連続関数解に関する性質として再現した。特に整函数の級数表現の超離散化を行い、その係数による増大度の評価式を導出した。

研究成果の概要（英文）：R. Nevanlinna's theory describes the value distribution of meromorphic functions in the plane. We have successfully transplanted it to a theory describing the value distribution of piecewise linear and continuous functions on the real line in the max-plus algebra. As an application, we can find some results on piecewise linear continuous solutions which correspond to those on meromorphic solutions to complex differential equations. Especially, some growth formulas for an ultra-discretized entire function are obtained in terms of the coefficients of its tropical series expansion.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| 2010 年度 | 1,200,000 | 360,000 | 1,560,000 |
| 2011 年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 2012 年度 | 1,300,000 | 390,000 | 1,690,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 3,300,000 | 990,000 | 4,290,000 |

研究分野：複素解析
科研費の分科・細目：基礎解析学
キーワード：ネバンリンナ理論・有理型函数・max-plus 代数・超離散方程式

## １．研究開始当初の背景

ネバンリンナによる値分布論が 1920 年代の後半に発表されて以降、代数型函数、正則曲線、リーマン面上の有理型函数から複素多変数函数、さらに複素多様体から複素射影代数多様体への正則写像の理論などへと一般化され様々な成果が得られてきた。1980 年代後半になり、 C. F. Osgood と P. Vojta が独立してこの理論とディオファントス近似、特に Roth の定理とネバンリンナの第二主要定理と呼ばれる結果の間に非常に興味深い類似を発見した。それを契機に「Vojta の辞書」の完成が重要な研究目標となっている。また 2009 年になって、R. G. Halburd と N. Southall が超離散方程式の可積分性に関する研究への応用をめざし、トロピカル・ネバ

ンリンナ理論を提唱した。然し、そこではいわゆる「ネバンリンナの第二主要定理」が欠けていた。ディオファントス近似、max-plus 代数上の値分布理論いずれの研究に於いても、より完成形に近い「第二主要定理」的な評価を欲するならば、「対数微分の補題」と呼ばれる結果の対応物が必須となる。ただし、どちらの場合にも微分という概念が許容されておらず、従ってある種の差分或いは離散的手法が不可欠になるのは当然である。一方で、微分方程式に対して古典的な意味でのネバンリンナ理論が適用され数多くの成果が確認されていたこともあり、差分方程式あるいは超離散方程式の解をネバンリンナ的手法で研究するという機運が高まりつつあった。その潮流の中、Vojta の辞書以外にも互いに翻訳し合える関係を見出すことが可能で、もしかするとその新たな辞書が Vojta の辞書で未完となっている対語を補完するのではないかと期待することは、あながち無謀なことではないと考えた。その目的で、まず移植が可能な「土壌」を色々と調査してみようと着想するに至った。

２．研究の目的

(1) 論文[4]に於いて、古典的ネバンリンナ理論とトロピカルの意味でのネバンリンナ理論の間に作られた Halburd-Southall の「辞書」に欠けていた第二主要定理を証明できたことで、これら二つの理論をより緊密に結びつけ、もし可能ならば完全な双方向の関係を完成させることを第一の目標とした。これにより移植先の候補として、最初で最大の目的地が max-plus 代数上における「関数論」となった。ここで「移植」と表現する限り、単に見た目が似ている「影」として投射するのでは不足である。当該分野の中に「種」となる基本的な結果を見つけ出し、それを古典的ネバンリンナ理論に於ける手法を手本として発芽させ力強く生育して、対応する主張として「結実」させることが最終目標である。それにより、古典的ネバンリンナ理論を、さらには複素空間に於ける議論の本質的な部分についてより深く理解し、いずれはトロピカルな空間に於いて可能な考察を、逆に「複素化」する手法を見出す足場とすることを目指している。評語的に表現するならば、「逆超離散化」という手順ではなく、有効な辞書を作成し「逆引き」するという手順の可能性を探るのである。移植先の固有「種」として選択すべき基本定理は、解析函数が満たす「平均値定理」の対応物である筈であり、実際にどう類似していれば移植手順が適用可能かという知見を得ることこそが重要な目標であった。

(2) 論文[1]では、H. Cartan による複素射影空間への正則曲線に関する値分布理論に対して、いわゆる差分版の理論を構成したが、それは超離散化への手順としては自然な流れとして考えられる。その方向性から、正則曲線を古典的に整函数の系列と考えて、射影化された max-plus 空間への正則曲線を同様に定義して、その値分布理論の可能性を調べることを目指した。その直接的な応用として、論文[4]で得た第二主要定理の証明についてより簡明な別証明を与えることが主たる目的であった。

(3) 本研究では、ディオファントス近似における貢献も目指した。前述したように Vojta の辞書には対数微分の補題に対応する概念が見つかっていない。それは、数体において微分という概念のどのような対応付けが可能か本研究の目的に沿う形では未解明のためである。Vojta 自身を含め複数の研究者によるこの方向での試みが発表されているが目的に沿う成果は得られていない様である。本研究では、あくまで古典的なネバンリンナ理論からのアプローチを試み、以下の手順での考察を行うことを目指した。有理数が成す無限列という古典的な対象を設定し、それを一変数有理型函数の対応物と見做し具体的な近似について考察する。対数微分の補題の差分版の導出と離散方程式への応用からの発想である具体的なアイデアを試すことが主たる目的であった。

(4) 最後に、「他分野」のより広い可能性を探り、研究過程で確認した「原理」の実行を目指した。具体的には、平面グラフについてのある評価式に「種」を期待し、議論を試みるものである。ネバンリンナ理論とオイラー標数との関連にその論拠を置いた。グラフ理論に於いて定義される位数や次数について、その平均値に関する等式を調べ、少なくともネバンリンナ流の高さ関数や個数関数などの定義の可否、それゆえ第一主要定理の類似物の存在の可能性を明らかにしたいと考えた。かなり風呂敷を広げ過ぎているが、値分布論の本質を「対象との平均交差回数と接近距離の平均の和についての不変性」の導出とみなし、その論理体系が移植可能な対象領域について、視野を数理科学やその関連分野に広げて可能な限り見出していくという計画を抱いていた。

３．研究の方法

本研究は当初の計画通り University of Eastern Finland, Joensuu Campus の研究グループとの共同研究として遂行された。当初は、本科学研究費補助金では同グループのメンバー数人の金沢招聘と、本研究代表者による数回の同機関訪問の費用を全て賄う計画であった。然し、各メンバーがそれぞれに研究費を獲得し、特に JSPS とフィンランド・アカデミーによる外国人研究者再招へい事

業（BRIDGE Fellowship Program）に採択されるなどしたことから、本科学研究費では2011年12月8日から12月 17日の期間にHeittokangas博士、2012年10月26日から11月08日の期間にLaine教授をそれぞれ招聘した。いずれも金沢大学に於いて集中的な議論を行った結果、本研究成果の中心的成果として論文に纏めることができた。一方で、東日本大震災の影響により研究代表者の訪問について計画変更をせざるを得ない状況になった。更には研究グループそれぞれが家庭の事情等で多くの制限を抱えることになったが、本研究代表者とLaine 教授、Korhonen 教授、Heittokangas博士との緊密な連絡体制は維持され、共同研究に大きな遅延を来すことなく目標を達成することができた。研究代表者本人にとっては、2010年のUCL(London)で開催された研究集会と2012年のNEEDS2012(Greece)の二つの国際究集会、そして同じく2012年のJoensuu(Finland)で開催されたLaine教授の70歳の記念研究集会での招待講演とそこで得られた様々な示唆、助言、批評そして関連情報が、この研究課題の次の展開に向けた重要な糸口を与えてくれた代えがたい財産となった。研究室に籠り、ひたすら電子メールで情報交換をしつつ議論を進めることも勿論必要な手順であるが、何がしかの飛躍のためには、優れた研究者たちの集う空間に飛び込み、自らを晒すことを欠いてはならないと身を以て再確認した。トロピカル・ネバンリンナ理論の始まりも、その新たな展開も、更には超離散化の手法に関するより実際的な考察やその意味合いの理解に結びつく知見も全て、各集会に参加していた心から尊敬する研究者からの親身な助言により教え導かれ、或いは叱咤された結果である。国内に於いても、連携研究者を初め多くの諸先生・先輩に加え新進気鋭の若手研究者から多くを学び刺激を受けながら研究を遂行した。特別な「方法」というのではなく、研究機関における様々な環境の下で精一杯に尽くし研究目標の到達をめざし、多くの研究者と交流の結果として目指す成果へと結びついたとの思いが強い。それ故、今回、形となった成果以上に、今後の研究計画に重要な意味合いを持つアイデアや考え方を得たと考えている。その意味でも、本研究の方法は決して間違ったものではなかったと確信する次第である。

４．研究成果

(1) 論文[4]で一程度の完成を見たトロピカル・ネバンリンナ理論は、実数体上を定義域とする一変数の区分的線形な連続関数に対する値分布理論であり、これは複素数体上で定義される一変数の超越的な有理型函数に対する値分布論が移植されたものと理解できる。本研究では、さらに双曲的な場合の考察を行い、平面上の開円板で定義される有理型函数を「超離散化」した場合、どの程度まで古典的な理論の移植が可能かを検証した。そこでは、論文[4]で Laine-Tohge や Halburd-Southall が与えた定義の厳密化と拡張の可能性について知見が得られた。この際に問題となるのが、平面上のシフト作用素に対応する円板内の作用素についての考慮で、自然な発想としてある一次分数変換がその候補と考えられる。しかし残念ながら、考察対象の関数が区分的に線形であるという制限と、一次分数変換による合成とは相いれないものである。実際には、複素函数の場合であっても我々の考察に適する形の「双曲的シフト」の候補が未だ見つかっていないことも判明した。一方で、「対数微分の補題」とそれ故「第二主要定理」を除いては、全平面の同様に「辞書」が完成できることが証明できた。これらの成果については、もう少し「双曲的シフト」の可能性を突き詰めた後に、Tropical Nevanlinna theory in a single variableの題目でLaine教授と共著論文を発表する準備を進めている。

(2) 論文[1]で得られた複素射影空間への正則曲線に関するカルタン理論の差分版を、更に超離散化するために、実数体上で定義される区分的線形な連続関数の系列を考え、max-plus射影空間への曲線を考察し、ある種の非退化条件を満たす場合に、論文[1]で得た第二主要定理に対応する結果を証明した。この非退化条件は、論文[4]の証明についてより簡明な別証明を与えるという当初の目的達成に可能条件である。従って、少なくとも古典的なカルタン理論における主要部の議論については、極めて類似の議論が展開されていることが分かった。その一方で E. I. Nochkaが導入し、退化する曲線に対する第二主要定理の証明に用いた、いわゆる Nochka weightsと Nochka constant に関する評価の対応物を見出すには至っていない。退化した場合の証明には、トロピカルの意味での線形従属性を考察するが、線形独立性にはいくつかの候補がある。カルタンとノチカによる考察の翻訳に最もふさわしい形の結果を導いた後に、これらの成果を論文に発表する。題目は Tropical Nevanlinna-Cartan theory でKorhonen教授との共著である。

(3) ディオファントス近似に関する研究は、Korhonen教授との共同研究でシフト作用素の可能性を検討した。最も基本的な設定でそのアイデアの可能性を確認し、本研究の目的に沿った議論を始めることができたが、これについては、上記した(1)(2)の成果を優先することを決断したため十分な検討を行うことができなかった。然しながら、少なくとも本研究代表者は一程度の議論の「結実」を

確認することができたことから、今後も共同研究を進める。本研究では、少なくとも可能性の高い「種」と「栽培方法」の存在についての知見を得ることができたと考えている。
(4) 研究の目的では、当初「他の分野」の可能性を平面グラフに求めた。本研究期間中に、グラフ理論の講義を担当し卒業研究指導する等、可能な「評価式」の候補を模索したが、考察を十分に深めるまでには至らなかった。その代替となるものが複素解析に関する結果を通じて得られた。論文[2][3]では複素微分方程式或いは q-差分方程式を満たす整函数についての考察を行い、興味深い結果が得られた。続いて、本研究の成果発表を行うべく招待された二つの国際研究集会[1][2]で極めて有益な情報を得た。これらのことが、これまでの研究を通じて感じていた複素解析的な手法が「滑らかに」超離散化されるという感覚と結びついた。以下、これを具体的に記述する。まず NEEDS2012 では、セッション・オーガナイザーの井上玲准教授（千葉大学）を初め高橋大輔教授（早稲田大学）など可積分系の研究者から超離散化・トロピカル化に対する有益な指導や示唆を得ることができた。整函数の級数表示と「対数位数」との関係に関する連携研究者の石崎教授との共同研究について発表した Univ. of Eastern Finland での Workshop では、既知の諸結果についての有益な情報が得られた。研究期間の最終盤になって、これらが整函数の Taylor 表示の超離散化という発想に結びついた。対数位数は別名 $q$-位数とも呼ばれており、超離散化と極めて相性がよいことが分かる。単純に無限級数を、実変数 x に関する無限個の線形項に対する最大値 $\max_{0<n<\infty}(nx + A_n)$ と対応付ける。このとき、係数 $A_n$ は $-\infty$ に発散する。超越整函数の Taylor 係数 $a_n$ が 0 に収束することと対応付けてそれぞれの漸近的な挙動を「計測」する。慣例通りに（自然）対数を用いたスケール変換を行えば、有限な値を得ることが可能になる。一般に実変数の正値関数 $S(t)$ に対して、$t\to\infty$ のときの「増大度」は

$$\limsup \{\log S(t)\}/(\log t) \qquad (a)$$

で、更にこの値 $\rho$ が有限な正数であれば、

$$\limsup S(t)/t^{\rho} \qquad (b)$$

を「タイプ」と定義するのであった。特に、(a),(b) で分母を $\log\log t$, $(\log t)^{\rho}$ でそれぞれ置き換えたものが「対数的増大度」と「対数的タイプ」である。一変数整函数の通常の増大度・タイプと同様に対数的増大度・対数的タイプについても、Taylor 係数の収束速度を用いた評価が可能であることを示したのが論文[2]である。超離散化への手順は、差分化を経由するのが通常と思われるが、勿論 q-差分化を通る道もある。実は上記の複素解析的手法は、この道を渡ることができれば、まっすぐに超離散化に向かうことが知られている。函数の超離散化は入出力の両方で（自然）対数によるスケール変換が行われるという理由から、複素直線上の整函数 $f(z)$ が実数直線上の区分的線形な連続関数 $F(x)$ に超離散化されるとき、前者の $S(t)=\log M(t,f)$ として得られる対数的位数と対数的タイプは、後者の $S(t)=M(t,F)$ として得られる位数とタイプに完全移植される。勿論、それぞれに現れる最大絶対値関数 M は

$$M(t,f) = \max_{|z|=t}|f(z)|,$$

$$M(t,F) = \max\{|F(-t)|, |F(t)|\}$$

で定義されていることに注意する。このとき、いずれの評価式も $a_n$, $A_n$ の各「無限級数表示」における「係数」を用いて、完全に対応付けられること示すことができた。この公式により、例えば、太田―高橋―時弘－野辺によるテータ函数の超離散化表現がトロピカルな意味での「位数 2 の整函数の対数差分」であり、C. M. Ormerod により得られた超離散パンルベ方程式の超幾何級数解もまた「位数 2 の整函数の対数差分」であることが分かる。楕円函数の位数および周期的な区分的線形な連続関数がいずれもそれぞれ位数 2 をもつことに注意したい。尚、この結果の証明は対応する複素解析的手法を完全に max-plus 代数に翻訳したものとなっている。最大値の原理や Cauchy の係数評価式も完全に対応しており、文字通り「移植」できたと言える。この知見こそが本研究におけるもっとも重要な成果であると考える。「トロピカルな土壌で育った固有種」を複素平面に再移植するという希望の萌芽を見出せたことがその理由である。この論文は、On the logarithmic order of a tropical entire function in terms of the coefficients の題目の下、本科学研究費の支援を受けたことを明記して、the Workshop on Complex Analysis and its Applications to Differential and Functional Equations in the honour of Ilpo Laine's 70th birthday の Proceedings にて発表する予定である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

1. Halburd, Rod, Korhonen Risto, and <u>Tohge Kazuya</u>, Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages, Trans. American Math. Soc.(掲載確定), 32 pages, 査読有

2. <u>Ishizaki, Katsuya</u> and <u>Tohge, Kazuya</u>, On the logarithmic order of an entire function in terms of the coefficients,

Proc. American Math. Soc. (掲載確定), 11 pages, 査読有

3. Heittokangas, Janne, and Tohge, Kazuya, A unit disc analogue of the Bank-Laine conjecture does not hold, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica, Vol. 36 (2011), 341-351. 査読有

4. Laine, Ilpo and Tohge, Kazuya, Tropical Nevanlinna theory and second main theorem, Proc. London Math. Soc., Vol. 102 (2011), 1-40. 査読有

〔学会発表〕(計６件)
1. Tohge, Kazuya, On the logarithmic order of an entire function in terms of the coefficients, The Workshop on Complex Analysis and its Applications to Differential and Functional Equations in the honour of Ilpo Laine's 70th birthday, 2012年12月04日, University of Eastern Finland (Finland)

2. Tohge, Kazuya, Introduction to Tropical Nevanlinna Theory, NEEDS2012 (Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems 2012), 2012年07月10日, Orthodox Academy of Crete (Greece)

3. 藤解 和也, On the logarithmic order of an entire function in terms of the coefficients, 日本数学会 2012 年度年会, 平成24年03月26日, 東京理科大学(東京都)

4. 藤解和也
Tropical Nevanlinna Theory in a single variable, 第５３回函数論シンポジウム
2010年11月21日, 名城大学サテライトプラザ (愛知県)

5. 藤解　和也, A unit disc analogue of the Bank-Laine conjecture does not hold, 日本数学会2010年度秋季総合分科会, 平成22年09月22日, 名古屋大学(愛知県)

6. Tohge Kazuya, Tropical Nevanlinna theory in a single variable Workshop on Function Theory and Dynamical Systems 2010年09月08日, University College London (GB)

６．研究組織
(1)研究代表者
藤解　和也 (TOHGE KAZUYA)
金沢大学・電子情報学系・教授
研究者番号：30260558

(2)研究分担者

(3)連携研究者
森　正気 (MORI SEIKI)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：80004456

下村　俊 (SHIMOMURA SHUN)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：00154328

石崎　克也 (ISHIZAKI KATSUYA)
日本工業大学・工学部・教授
研究者番号：60202991