様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　６ 月　８ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2014
課題番号：２２５４０１８５

研究課題名（和文）偏微分方程式論における解の一意接続問題と複素位相法

研究課題名（英文）Unique continuation problems and complex phase methods in the theory of partial differential equations

研究代表者
大鍛治　隆司（Takashi, OKAJI）

京都大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：２０１６０４２６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：相対論的粒子の運動を記述するディラック作用素に対するスペクトル問題に取り組み、その本質的自己共役性や、固有値・スペクトル閾値の非存在問題についていくつかの重要な結果を得た。また、ある臨界特異型ポテンシャルを持つ2階放物型方程式に対する強一意接続性を示した。さらに、整函数係数を持つある偏微分方程式のコーシ問題に対する解の解析接続問題にとりくみ、路の変形理論における新しい方法を創出すると共に、解の特異性の複素大域的構造を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：We investigated spectral properties of Dirac operators for the relativistic particles like electrons and obtained important results on its essential self-adjointness and the absence of eigenvalues at the thresholds. Moreover, we established the strong unique continuation property for parabolic operators of second order with singular potentials. In addition, we revealed a global structure of the singularities of solutions to the Cauchy problem for a partial differential equation in the whole complex domain.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：解の一意接続性　ディラック作用素　放物型方程式　スペクトル問題

１．研究開始当初の背景

近代偏微分方程式論においては、1960 年代に関数解析学的手法を用いて、楕円型方程式、放物型方程式、双曲型方程式、シュレディンガー方程式などの線形方程式に対する境界値問題･初期値問題等の基本的諸問題に対する解の存在定理が確立された。次いで 1970 年代になると、詳細なフーリエ解析的手法(擬微分作用素、超局所解析)を用いて解の特異性の伝播などに代表される解の定性的性質が明らかにされ始めた。これに対して解の定量的評価についてもカルレマン評価式を初めとして整備され、現在も発展しつつある。しかしながら、取り扱いの複雑さからあまり研究が進んでいないのが現状である。そこで、各種の方程式に対して解の定性的性質と定量的評価の中間に位置づけされる「解の一意接続性」･「固有値の存在･非存在」という重要な問題について複素位相エネルギー法を用いて考察することとした。

２．研究の目的

本研究では、偏微分方程式に対する解の特異性伝播などの定性的性質と Lp-Lq 不等式に代表される解の詳細な定量的評価式の2つの性質に深く関連する「解の一意接続性問題」に焦点を当て、この問題を従来の枠組みを超えた新しい複素位相法の観点から捉え直すことにより、種々の方程式に対する解の構造を考察する。特に、数理物理学に現れる各種の偏微分方程式を取り扱い、これらの解の一意接続性並びにスペクトル問題に関連する種々の解の構造を複素位相の観点から総合的にとらえ解明することを目的とする。

３．研究の方法

まず始めに相対論的粒子の運動を記述するディラック方程式についてスペクトルの閾値の非存在問題を考える。この際粒子の質量が正または零の場合を取り扱い、それぞれの場合に応じて許容されるポテンシャルクラスを決定することが望ましいが、そのためにある重み付き空間における定量的な複素位相評価式を基礎にして行う。

また、熱方程式を一般化した 2 階放物型方程式についてスカラーポテンシャルやベクトルポテンシャルが特異性を持つ場合について「１点で無限次の零点を持つ解は常に空間方向に零である」という放物型強一意接続性がどのような条件の下で成り立つかを考える。この際、従来の標準的方法においては、カルレマン不等式と呼ばれる大きなパラメータを持つ重み付き不等式における重み函数をうまく選ぶことにより直接強一意接続性を導いていたのであるが、今の場合は重み函数を 2 種類用意してカルレマン評価式を２段階で用いることによって、より弱い条件下で強一意接続性を導く。

複素領域におけるコーシ-問題に対する解の解析接続問題について、新しい路の変形理論を構築しその大域的特異性を調べる。

４．研究成果

⑴ 非負な質量 m を持つ自由粒子に対するディラック作用素 $\alpha\cdot p+m\beta$ のスペクトルは$(-\infty,-m]\cup[m,\infty)$と一致し、この作用素に無限遠方で減衰するポテンシャル V(x)を付け加えた $\alpha\cdot p+m\beta+V$ に対する本質的スペクトルが$(-\infty,-m]\cup[m,\infty)$となることはよく知られている。この部分集合の境界点 m と-m(閾値という)が固有値であるかどうかは物質の安定性と深い関連がある重要な未解決問題である。

研究代表者大鍛治隆司はこのスペクトルの閾値問題に関する考察を Hubert Kalf 氏ならびに山田修宣氏と共同で行い、massless (m=0)のみならず massive (m>0)の場合の両方についてそ

れぞれ zero modes の非存在と±m が固有値でないためのポテンシャルに対するある精密な十分条件を得た。これらの条件はポテンシャルが遠方でゆっくり減衰するあるクラスを定めており、結果として massive の場合のクラスの方が massless の場合のクラスより広いことがわかる。証明には重み付き複素位相エネルギー法を繰り返し用いて示される。その際、最初の段階で未知関数に重みをつける変換を行う為、変換された後の方程式はもはや自己共役性は保たず複素ポテンシャルを含む方程式になっていることに注意する。そのためこの複素ポテンシャルを含む項がコントロール可能であることを示すことが最重要であるが、それには一連の精密な解析･評価を経て解決される点を強調しておきたい。さらに、これらのポテンシャルクラスは massless および massive の場合にそれぞれ最良である事も付随する常微分方程式に対する解の漸近挙動を解析することにより明らかにしている。また、同じ両氏との共同研究において、特別な磁場モーメントを持つ場合にディラック定常作用素に対する本質的自己共役性についての研究を行った。この際 1 階双曲型方程式系に対する解が時刻 t において空間の領域 R<|x|で恒等的に零となっているときに時刻 t+T においてその解は R+T<|x|において恒等的に零であるという時間発展方程式に対する解の零点の伝播についての性質(「解の有限伝播性」)が重要な役割を果たした。

（2）研究代表者大鍛治隆司は、まず解の強一意接続性に関して熱方程式に代表される 2 階放物型方程式を取り扱った。ここで言う強一意接続性とは、解が時刻 t、空間内の点 x において無限次の零点を持てばその解は常に時刻 t において恒等的に零となる性質である。これに関する従来の研究においては、方程式に空間方向に関する 1 階微分項が低階項として存在するときの取り扱いは極めて不十分であった。これは放物型方程式と対応する 2 階楕円型方程式との構造上の本質的な相違に起因する。特にその係数の特異点が臨界指数を持つときには対応する楕円型方程式に対する結果と比較して極めて不十分な結果しか得られていなかった。それは通常の方法では基礎となるカルレマン不等式を導くことが出来なかったことに由来する。この困難を克服するために重要なのは「2 段階式カルレマン評価法」と名付けた以下の方法である。即ちまず作用素の主部に対してべき型の特異性を持つ重み函数に関しての 1 段目のカルレマン不等式を確立した後、これを用いて低階項も込めた元の方程式に対する解は無限次の零点を持てば常に指数関数的に退化する無限次の零点を持つことを示す。最後にこの強い退化の性質から指数関数型の特異性を持つ重み函数に関する 2 段目のカルレマン不等式を確立し、これにより解はある近傍で恒等的に零となることが示される、この結論は従来の結果を大幅に改良し、対応する単独楕円型方程式に対する結果とほぼ同等なものである。

（3）濱田雄策氏(京都工芸繊維大学)と竹井義次氏(京都大学数理解析研究所)との共同研究において、整函数係数を持つ偏微分方程式のコーシ-問題やコーシ-グルサー問題に対する解の解析接続について考察を行い、Path の変形理論における新しい方法を確立すると共に、それを用いて多重度が変化する特性面を持つ方程式に対して、解の大域的特異性の完全な構造を初めて明らかにした。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 7 件）

① Hubert Kalf, Takashi Okaji and Osanobu Yamada, The Dirac Operator with Mass $m_0 \geqq 0$: Non-Existence of Zero Modes and of Threshold Eigenvalues, Documenta Mathematica. 20 (2015), 37-64.

http://www.math.uiuc.edu/documenta/vol-20/02.pdf
② Yusaku Hamada, Takashi Okaji and Yoshitsugu Takei, Le prolongement analytique de la solution du probl`eme de Cauchy pour un certain op'erateur diff'erentiel `a coefficients polynomiaux III, J. Fixed Point Theory Appl.,September 2013, Volume 14, Issue 1, pp 149-163,
DOI 10.1007/s11784-014-0153-8
③ Yusaku Hamada, Takashi Okaji and Yoshitsugu Takei, Le prolongement analytique de la solution du probl`eme de Cauchy pour un certain op'erateur diff'erentiel `a coefficients polynomiaux II, J. Fixed Point Theory Appl., September 2013, Volume 14, Issue 1, pp 113-148,
DOI 10.1007/s11784-014-0152-9
④ Takashi Okaji, A note on unique continuation for parabolic operators with singular potentials, Studies in Phase Space Analysis with Applications to PDEs, Progr.Nonlinear Diff. Eq. Appl.,84 (2013) 311–332.
⑤ Yusaku Hamada, Takashi Okaji and Yoshitsugu Takei, Probl`eme de Cauchy et Goursat analytique, Publ.RIMS Kyoto Univ. 48 (2012), 139--181,
DOI 10.2977/PRIMS/65.
⑥ 大鍛治 隆司，放物型方程式に対する解の強一意接続性，第 50 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集，(2011) 34–43.
⑦ Hubert Kalf, Takashi Okaji, Osanobu Yamada, A Note on the Essential Selfadjontness of Dirac Operators with an Anomalous magnetic Moment, Mem. Inst. Sci. Engrg. Ritsumeikan Univ. 69(2011)1–5.

〔学会発表〕（計４件）
① 大鍛治 隆司、Dirac 作用素に対する閾値における固有値の非存在について、Joint work with H.Kalf and O.Yamada、「第 21 回超局所解析と古典解析」、2014 年 12 月 6 日、松藤プラザ「えきまえ」いきいきひろば。
② Takashi Okaji, A note on unique continuation for parabolic operators with singular potentials, Perspectives in Phase Space Analysis of Partial differential equations, the University Residential Centre, Bertinoro Italy, from 27 to 30 September 2011
③ 大鍛治隆司, Spectral problems about many-body Dirac operators, スペクトル・散乱理論とその周辺, 2012 年 12 月 13 日, 数理解析研究所
④ 大鍛治隆司, 2 段階式 Carleman 評価法 I,II,III, 逆問題への応用を意図した解析学の研究, 2012 年 07 月 25 日～2012 年 07 月 27 日数理解析研究所

〔図書〕（計０件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
大鍛治　隆司（OKAJI　TAKASHI）
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：２０１６０４２６