様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月３１日現在

機関番号：14301
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2012
課題番号：22540186
研究課題名（和文）可積分階層の理論と数理物理への応用
研究課題名（英文）Theory of integrable hierarchies and its application to mathematical physics
研究代表者
高崎　金久（TAKASAKI KANEHISA）
京都大学・大学院人間・環境学研究科・教授
研究者番号：40171433

研究成果の概要（和文）：

可積分階層は無限自由度の古典可積分系である．代表的な例として KP 階層と戸田階層ならびにそれらの多成分系がある．本研究は数理物理の最近の進展の中から題材を取り上げて，可積分階層の理論と応用の両面を考察した．すべての題材は数理物理学の最近の進展において重要な役割を果たしている．理論面に関しては，戸田階層，無分散戸田階層，B 型ならびに D 型の可積分階層に関して一連の成果があった．
応用面のテーマは統計力学，ゲージ理論，弦理論からそれらに関連する数学的諸問題に至るまで広範囲にわたる．離散的量子力学の可解模型も直交多項式系の観点から研究対象とした．

研究成果の概要（英文）：

Integrable hierarchies are a class of classical integrable system. Typical examples are the KP hierarchy, the Toda hierarchy and multi-component versions thereof. This research
is focussed on both theoretical aspects and applications to mathematical physics.
All materials play an important role in recent progress of mathematical physics.
As regards the theoretical aspect, we have obtained some results on the Toda hierarchy,
the dispersionless Toda hierarchy and integrable hierarchies of the B and D types.
Subjects of applications to mathematical physics range over statistical mechanics, gauge theories, string theories and related mathematical issues. Solvable models in discrete quantum mechanics are also studied in the context of orthogonal polynomials.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：代数解析

１．研究開始当初の背景

申請者は本研究に先立つ基盤研究(C)の研究課題「可積分系と数理物理の新たな接点の探求」において，数理物理の最近の進展の中に可積分階層の研究の新たな題材を探った．その成果として，超対称ゲージ理論のインスタントン和や統計力学の溶解結晶模型に関する諸問題（戸田階層との関係，量子トーラス代数対称性，熱力学的極限と無分散戸田階層の関係），可積分階層とその無分散極限の理論的諸問題（可積分階層における微分フェイ等式やその差分類似の新たな役割，DKP 階層なとどの D 型可積分階層の無分散極限の構造，無分散可積分階層の有限変数簡約におけるレブナー型方程式の役割），対数的時間発展による可積分階層の拡張の問題（ソリトン方程式のいわゆる 2+1 次元拡張との類似性，双線形形式の構造）などについて一定の結果を得ることができた．これらの問題は孤立したものではなく，国内外の近年の可積分階層の研究の動向と密接に関連している．そこには，未解明の部分や新たな発展が期待できる部分も多く，引き続き研究を進めることが望まれていた．

さらに，この研究課題を追求する過程で申請者自身は新たな結果を得る段階には至らなかったが，ランダム行列や直交多項式系の研究において多成分 KP 階層が注目されていること，3 次元トーリックカラビ-ヤウ多様体上の位相的弦理論においても多成分 KP 階層との関係が論じられていること，量子可積分系のベーテ仮設法に現れる行列式(イゼルギン-コレピン行列式やスラブノフ行列式）が KP 階層や戸田階層のτ函数として解釈できること，それと関連して交代符号行列の数え上げなどの組合せ論的問題においても可積分階層のτ函数として解釈できる量が現れることなどを学んだ．

２．研究の目的

(1) 研究開始当初は次のような目標を掲げた．

① KP 階層や戸田階層の準古典展開をすべての次数にわたって詳しく考察する．たとえば，最低次部分すなわち無分散極限については有限変数簡約や解の幾何学的記述が知られているが，高次部分におけるそれらの対応物を探る．
② D 型可積分階層の無分散極限は，有理函数で記述される無分散 KP・戸田階層などと違って，楕円曲線の変形方程式と見なせる．この場合について無分散 KP・戸田階層の有限変数簡約や解の幾何学的記述の類似を探る．
③ 量子トーラス代数対称性の役割をインスタントン和・溶解結晶模型以外の問題にも探る．特に，球面のフルビッツ数の母函数とその q 類似（いずれも KP 階層や戸田階層のτ函数になることが知られている）が有望な対象と思われる．
④ 多成分 KP 階層とその無分散極限の役割をランダム分割とその多次元化（ランダム平面分割など）に関わる問題において探る．
⑤ ベーテ仮設法においてイゼルギン-コレピン行列式やスラブノフ行列式などの行列式構造が現れる理由を解明し，ベーテ状態の内積を一般化されたτ函数として理解する．
⑥ 以前の研究ではあまり成果が得られなかった確率過程と可積分階層の関わりの問題について，新たな観点から取り組む．

(2) その後研究が進むにつれて，いくつかの目標が修正される一方，次のような目標が新たに加わった．

① D 型可積分階層と B 型可積分階層の結合系を考察し，特殊解，フェイ型等式，無分散極限などを考察する．
② アブロビッツ-ラディック階層に対して戸田階層との関係，フェイ型等式や無分散極限の構造，溶解結晶模型や位相的弦理論との関わりなどを探る．
③ 溶解結晶模型の熱力学極限や位相的弦理論の振幅函数を参考にしつつ，フロベニウス構造の新たな例の構成や数理物理への応用を試みる．
④ 一般化コニフォルドと呼ばれる特殊な 3 次元トーリックカラビ-ヤウ多様体の上の位相的弦理論の振幅函数を可積分階層や量子ミラー曲線の観点から考察する．

３．研究の方法

(1) 可積分階層の準古典展開に関する研究をモスクワ在住の研究協力者である武部尚志と共同で行った．KP 階層の場合については以前からの共同研究で成果が上がっており，この研究では戸田階層や多成分 KP 階層も同様の方法で扱うことをめざした．ランダム行列に対する B.エナールと N.オランタンの位相的漸化式の理論も重要な指針を示すものと期待された．

(2) D 型や B 型の可積分階層については，関連するテーマを研究している筧三郎（立教大学），塩田隆比呂（京都大学）やモスクワの専門家 A.オルロフと連絡をとりながら研究を進めることにした．特にオルロフはD型とB 型の結合系の定式化や特殊解の構成に関して成果を上げつつあった．そこで，申請者がD型やB型の可積分階層について行ったフェイ型等式や無分散極限の研究をオルロフの結合系に拡張することをめざした．

(3)インスタントン和・溶解結晶模型については，中津了勇（摂南大学）と引き続き共同で研究を続けた．以前の共同研究には熱力学極限の取り扱いに誤りがあることが明らかになり，4次元の N=2 超対称ゲージ理論のインスタントン和の熱力学極限に対するネクラソフとマルシャコフの研究を参考にして，熱力学極限の扱い方を考え直すことになった．同時に SU(N) ゲージ理論への拡張も試みることになった．また，以前の研究で溶解結晶模型の可積分構造を説明する鍵となった量子トーラス代数のシフト対称性について，その正当性に若干の疑問が生じたので，問題点の洗い出しを行うことになった．

(4)アブロビッツ-ラディック階層については，2+1 次元拡張や対数的時間発展についての考察が当初の理解を深めるのに役立った．その後，B.ドゥブロビンや A.ブリニらが新たな観点からアブロビッツ-ラディック階層に関心を持っていることを知った．特にブリニの研究は溶解結晶模型や位相的弦理論とアブロビッツ-ラディック階層の関係を示すものであり，そこから新たな題材や方法を学ぶことにした．

(5) フルビッツ数の母函数については，以前から可積分階層との密接な関係が知られており，既存の研究から題材や方法を学ぶことにした．母函数は一種の種数展開をもち，その最低次部分は無分散可積分階層の解になると期待される．このことを探るには，以前行った c=1 弦理論に関する研究が参考になると考えた．

(6) アメリカ在住の村瀬元彦（カリフォルニア大学デイビス校）からフルビッツ数の母函数に対するエナール-オランタン理論の観点からの研究を学び，同様の観点でフルビッツ数の q 変形の母函数や位相的弦理論の振幅函数を調べることができると考えた．これらの函数をフェルミオン表示することによって溶解結晶模型と類似する構造が見えてくるということにも注目した．

(7) 量子可積分系や可解な確率過程の研究については，連携協力者の佐々木隆（京都大学）の協力を仰いだ．

４．研究成果

(1) 武部尚志と共同で，戸田階層に対して準古典展開をもつ解の一般的記述を与えた．解の記述はラックス作用素とオルロフ-シュルマン作用素に対する一般化弦方程式から出発する．この般化弦方程式を準古典展開して巨大な連立方程式に書き直し，それらが漸化式として解けることを示した．これは KP 階層に関して以前行った研究の戸田階層への拡張であり，KP 階層の場合とともに，可積分階層の準古典展開に関する基本的な結果と考えられる．ただし，当初期待していたエナール-オランタン理論との比較はうまく行かないことが判明した．

ただし，４次元理論に対応する解は一般化弦方程式によって一意的に定まるが，５次元理論に対応する解は一般化弦方程式では完全には決まらない，という奇妙な状況も明らかになった．この結果は背後に戸田階層よりも大きな可積分系が存在することを示唆するものと思われる．

さらに，この溶解結晶模型を５次元 U(1)ゲージ論のチャーン-サイモンズ項で変形した模型の熱力学極限も同様の方法で扱えることがわかったが，この結果も背後に未知の可積

(2)　４次元のN=2超対称U(1)ゲージ理論のインスタントン和の熱力学極限を参考にしつつ，５次元超対称U(1)ゲージ理論のインスタントン和である溶解結晶模型に対しても，熱力学的極限の正しい扱い方を見出すことができた．いずれの場合も，熱力学極限を記述するリーマン-ヒルベルト問題の解は具体的に求めることができる．さらに，それらの解は無分散戸田階層の一般化弦方程式を満たす解に対応する，ということが明らかになった．

分系が存在することを示唆している．
SU(N)ゲージ理論のインスタントン和の熱力学的極限についても部分的な結果が得られているが，まだ完全な解決には至っていない．

(3) 球面の 2 重フルヴィッツ数の母函数は戸田階層の τ 函数とみなせることが知られている．この τ 函数の定める戸田階層の解に対して一般化弦方程式を導出し，その準古典（無分散）極限が c=1 弦理論の一般化弦方程式と同様に扱えることを見出した．時間変数を特殊化すれば，そこからフルビッツ数と密接な関係にあるランベルト函数が現れる．これはエナール-オランタン理論の意味でのスペクトル曲線を戸田階層の枠組みで導出したものと解釈される．

(4) 無分散戸田階層の有限変数簡約の新たな例や既知の例の拡張を見出し，それらに内在するフロベニウス構造も考察した．既知の例の拡張の中にはアブロビッツ-ラディック階層の無分散極限も含まれている．新たに見出した有限変数簡約の例は J.T.ファーガソンと I.A.B.ストローンが無分散 KP 階層において考察した一般化 waterbag 解と類似する構造をもち，彼らの方法にならってフロベニウス構造を構成できることがわかった．しかし，これらには第 2 のフロベニウス構造を具体的に構成できないという共通の難点点もあり，今後の研究に課題を残している．

(5) 前述の溶解結晶模型を少し修正した模型がアブロビッツ-ラディック階層の解を与えることがわかった．
この模型の分配函数はコニフォルド上の位相的弦理論の振幅函数とみなすこともできる．ブリニはこの振幅函数の種数展開の最低次部分がアブロビッツ-ラディック階層の無分散極限の解であることに注目し，振幅函数自体がアブロビッツ-ラディック階層の解であることを予想して，種数展開の低次でその予想を確かめた．
この予想に対して，ここでは溶解結晶模型の可積分構造の研究のために開発した技法を修正・拡張しながら利用した．また，その過程で，技術的な要である量子トーラス代数のシフト対称性を以前の研究よりも確実な形で確認した．
この結果を一般化コニフォルドと呼ばれる３次元カラビ-ヤウ多様体上の位相的弦理論の振幅函数に拡張することは興味深い問題である．

(6)一般化コニフォルド上の位相的弦理論の振幅函数のある種の母函数がｑ差分方程式を満たすことを示した．これは S.グコフと P.スルコフスキー予想していたものであるが，ｑ差分方程式の形は彼らが予想していたものとは少し異なる．弦理論の観点では，これは弦の波動関数が満たす方程式であり，一般化コニフォルドの量子ミラー曲線を表現するものと解釈される．
この結果自体はそれほど奥深いものではない．可積分階層の観点から見れば，この母函数は KP 階層の解のベイカー-アヒーゼル函数（の時間変数に関する特殊値）にほかならない．これを出発点として，一般化コニフォルド上の振幅函数を多成分 KP 階層の観点から理解することが今後追求すべき課題である．

(7) A.オルロフ，塩田隆比呂との共同研究で，B 型，D 型，ならびにそれらの結合系の可積分階層に対して，パフィアンで記述されるさまざまな解を見出した．これらはパフィアンと関係するランダム行列・ランダム分割模型や超幾何函数・球関数論に応用できるものと期待される．ただ，広田方程式，フェイ型等式，補助線形問題など可積分階層自体の構造はまだ十分に解明されていない．

(8) 連携研究者の佐々木隆は 1 次元の離散的量子力学系の観点からさまざまな直交函数系を統一的に扱う方法を示した．その鍵となるのは離散的なハミルトニアンの因子化，ダルブー-クラム変換，形状不変性，動力学的対称性，準可解性などである．連続的量子力学系の場合にはこれらの技法は長年にわたって利用されてきた．それを離散化することによって，古典的な直交多項式系やアスキースキームの直交多項式系を統一的に扱えるのみならず，新しい（例外型）直交多項式系を発見することも可能になった．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計９件）

1. Kanehisa Takasaki, Modified melting crystal model and Ablowitz-Ladik hierarchy, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 46 (2013), 245202. doi:10.1088/1751-8113/46/24/245202．査読あり
2. Kanehisa Takasaki, Old and new reductions of dispersionless Toda

hierarchy, SIGMA 8 (2012), 102, 22 pageg. doi: 10.3842/SIGMA.2012.102. 査読あり

3. Satoru Odake and Ryu Sasaki, Multi-indexed (q-)Racah Polynomials, Journal of Physics A: Mathematical and Theoremtical 45 (2012), 385201. arxiv:arXiv:1203.5868[math-ph]. 査読あり
4. Kanehisa Takasaki and Takashi Takebe, An hbar-expansion of the Toda hierarchy: a recursive construction of solutions, Analysis and Mathematical Physics 2 (2012), 171-214. arXiv:1105.0794 [math-ph]. 査読あり
5. Kanehisa Takasaki and Toshio Nakatsu, Thermodynamic limit of random partitions and dispersionless Toda hierarchy, J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012), 025403. arxiv:1110.0657[math-ph]. doi: 10.1088/1751-8113/45/2/02540. 査読あり
6. Kanehsia Takasaki and Takashi Takebe, An hbar-dependent formulation of the Kadomotsev-Petviashvili hierarchy, Theoretical and Mathematical Physics 171 (2) (2012), 683-690. arXiv:1105.0794. 査読あり
7. Kanehisa Takasaki, Toda tau functions with quantum torus symmetries, Acta Polytechnica 51, No.1 (2011), 74-76. arXiv:1101.408. 査読あり
8. Kanehisa Takasaki, Generalized string equations for double Hurwitz numbers, Journal of Geometry and Physics 62 (2012), 1135-1156. arXiv:1012.5554. 査読あり

9. Satoru Odake and Ryu Sasaki, Discrete quantum mechanics, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 44 (2011), 353001.doi: 10.1088/1751-8113/44/35/353001. 査読あり

〔学会発表〕（計 9 件）

1. 高崎金久, 溶解結晶模型と Ablowitz-Ladki 階層, 日本数学会年会, 2013 年 3 月 22 日, 京都大学
2. Ryu Sasaki, Exactly Solvable Quantum Mechanics and Multi-indexed Orthogonal Polynomials, The 29 International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, August 20-26, 2012, Chern Institute of Mathematics, Tianjin, China. 招待あり
3. Kanehisa Takasaki, Integrable structure of melting crystal model, Integrability in Gauge and String Theory, 2012 年 08 月 20 日~2012 年 08 月 23 日, スイス連邦工科大学チューリッヒ校
4. Kanehisa Takasaki, Combinatorial properties of toric topological string partition functions, 合宿型セミナー「ヤング図形・統計物理に関連する代数的組合せ論」(招待講演), 2012年08月09日, 国際高等研究所 . 招待あり
5. Takashi Takebe, Hbar-expansion of integrable hierarchies: recursive construction of solutions, Iinternational Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems, 2011 年 1 月 27 日, nstitute for High Energy Physics, Protvino, Russia. 招待あり
6. 高崎金久, 無分散変形 KP 階層の新しい簡約, 日本数学会年会, 2011 年 3 月 22 日, 早稲田大学（備考：東日本大震災によって中止されたが, 講演アブストラクト集の発行によって発表は行われたものとみなされている）
7. 高崎金久, フルヴィッツ数に関連する戸田階層の特殊解とその古典極限, 日本数学会秋期総合分科会, 2010 年 9 月 24 日, 名古屋大学
8. Ryu Sasaki, Exactly Solvable (Discrete) Quantum Mechanics and Exceptional Orthogonal Polynomial, The Second International Conference: Nonlinear Waves --Theory and Applications, 2010 年 6 月 27 日, Tsinghua University, Beijing, China. 招待あり
9. Kanehisa Takasaki, Toda tau function with quantum torus symmetries, 19th International Colloquium on Integrable Systems

and Quantum Symmetries, 2010年6月 18 日, Czech Technical University, Prague, Czech Republic

６．研究組織

(1)研究代表者

高崎　金久

(TAKASAKI KANEHISA)

京都大学・大学院人間・環境学研究科・教授

研究者番号：40171433

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

佐々木　隆

(SASAKI　RYU)

京都大学・基礎物理学研究所・准教授

研究者番号：20154007