

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 28 日現在

機関番号：35403

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540192

研究課題名(和文) さまざまな関数空間のポテンシャル解析と新展開

研究課題名(英文) Potential analysis of various function spaces and application

研究代表者

水田 義弘 (Mizuta, Yoshihiro)

広島工業大学・工学部・教授

研究者番号：00093815

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：身の回りに起きるさまざまな現象を、数学の理論を用いて解析するために、偏微分方程式を利用する。現象を記述する偏微分方程式を求めて、その解を解析することによって、現象の起因を説明するとともに将来予測が可能となる。偏微分方程式の解の存在や解の特性を調べるとき、本研究の主題である関数空間が必要な役割を果たす。

本研究において、Sobolev が開始した理論を発展させることによって、身の回りに起きる複雑な現象を解明するための数学的な方法を数多く与えることに成功した。この理論を継続・発展させることによって、さまざまな現象を解明し将来予測に結び付けることが大いに期待される。

研究成果の概要(英文)：To develop various phenomena surrounding our nature by applying Mathematical method, a theory of partial differential equation is a crucial mathematical tool. To do so, our first task is to find a suitable partial differential equation describing a phenomenon and analyze a solution of the equation, and then we can predict our near future. For this purpose, function spaces play an important role.

In our study, we extend the famous theory developed by Sobolev and investigate tremendous phenomena as applications. It will be expected to give further development of our theory for human welfare.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・解析学基礎

キーワード：ポテンシャル解析 関数空間 偏微分方程式 ソボレフの定理

1. 研究開始当初の背景

ソボレフの研究以降、弱微分がルベークの L^p 関数ばかりでなく Orlicz の関数であるような Orlicz-Sobolev 関数の研究が行われた。ソボレフ空間をルベークの L^q 空間へ埋め込むソボレフの不等式はよく知られている。また、Orlicz-Sobolev 関数は連続とは限らないが、それに近い良い性質をもつことが期待される。例えば、Brezis と Wainger の論文では、Orlicz-Sobolev 関数が "ほとんど Lipschitz" となる場合が示された。さらに Adams と Hurri-Syrjanen 氏はソボレフ関数が連続とならない場合でも "vanishing exponential integrability" と呼ばれる積分平均に関する連続性を論じた。この論文と関連して、Morrey 空間や Besov 空間に対応する研究も望まれている。Morrey-Sobolev 関数について、中井英一氏との共同研究を通じて、ソボレフ型の不等式が導かれることを示した。この方面の研究の発展も望まれる。

このような関数の性質は、定義されている領域の境界の形状に大きく依存する。この複雑さを和らげるために、Koskela や Heinonen 氏による距離空間上での議論もあるが、現在でもわかっていることは少なく、依然として興味深い研究テーマである。

2. 研究の目的

偏微分方程式の解の存在や正則性を調べるときに、ソボレフ関数は重要な役割を果たす。弱微分がルベークの L^p 関数であるような関数に対して、ソボレフの不等式、Trudinger の指数不等式やヘルダー連続性などが調べられた。これらの研究の発展として、ルベークの L^p 関数ばかりでなく、Orlicz 関数、Morrey 関数、Besov 関数であるときの研究が求められている。さらに、21世紀に入って、変動指数をもつ関数空間の研究も盛んに行われている。

そこで、本研究の目的は、これらさまざまな関数空間に対応して、ソボレフの不等式、Trudinger の指数不等式、ヘルダーの連続性がどのように拡張・発展されるかを論じ、その応用として偏微分方程式の研究に貢献することにある。

3. 研究の方法

身の回りに起きる複雑な現象を解明するためには、偏微分方程式の研究が有効である。偏微分方程式の解の存在や正則性を論じるとき、ソボレフが導入した関数空間、いわゆるソボレフ空間、が重要な役割を果たしてきた。最近では身の回りに起こる現象がますます複雑となり、それに伴って、その現象を記述する偏微分方程式とそれを解明するための関数空間が多様化している。

本研究では、さまざまな関数空間の性質を解明することにより、偏微分方程式の研究に役立てることを目的とした研究を行う。この研究を遂行するために、広島ポテンシャルセミナーを定期的に開催し、本研究に関連した話題について討論する。これによって、本研究の発展ばかりでなく若手研究者の養成をも目指す。さらに、本研究に関連した図書や計算機環境を整備するとともに、国内外の研究者と密接な研究交流を行う。

4. 研究成果

ソボレフ関数について様々な角度から精力的に研究を行ってきた。ソボレフ関数とは微分がルベークの可積分関数であるものをいう。このような関数は一般には連続と限らないが、何らかの良い性質をもつことが期待される。例えば、ルベーク点の理論のように、積分に関する連続性が示されている。また、ディリクレ問題と関連して、ソボレフ関数が定義されている領域の境界付近での連続性は特に興味深い。これまでの研究では主に微分がルベークの L^p 関数族に含まれる場合について精力的に行われてきた。Hedberg 氏によって、極大関数が定める作用素がきわめて有効な道具であることが示されてから、ソボレフの埋蔵定理などの重要な定理が初等的方法で証明できるようになった。本研究の目的は、一般の変動指数をもつ関数空間において、極大関数の有界性を示し、その応用として、ソボレフの埋蔵定理などの重要な理論を展開することにある。本年度の研究において、ルベークの L^p 空間よりさらに一般的な関数空間においても Diening 氏の理論が成立することを示した。さらに、その応用として、ソボレフの埋蔵定理に関して、新しい知見を得ることができた。これからの研究において、これらの議論をさらに発展させることが求められる。

本研究で得られた成果は次のようである。

1. Adams-Meyers の L^p 容量を Orlicz の範疇で球体の容量を正確に計測することができ、この成果を次の論文で発表した： Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Weighted Orlicz-Riesz capacity of balls, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 4291--4302. Toshihide Futamura, Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Orlicz-Sobolev capacity of balls, Illinois Math. J. 55 (2011), 543--553.
2. Morrey 空間や Orlicz 空間よりさらに一般的な変動指数をもつ関数空間において、Sobolev 型の定理の発展を行った。この結果は次の論文で発表した： Yoshihiro Mizuta, Eiichi Nakai, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Maximal

functions, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Morrey-Musielak-Orlicz spaces of variable exponent in R^n , Rev. Mat. Complut. 25 (2012), 413--434.

3. 極大作用素は, $p > 1$ のとき, L^p から L^p の中への有界な作用素であることはよく知られている。この事実を発展させ, 極大作用素の定義域と値域の精密化を行い, 次の論文で発表した:
Yoshihiro Mizuta, Ales Nekvinda and Tetsu Shimomura, Hardy averaging operator on generalized Banach function spaces and duality, Z. Anal. Anwend. 32 (2013), 233--255.

以上のように, 多くの成果を得て広く公表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

1. Yoshihiro Mizuta and Takao Ohno, Sobolev's theorem and duality for Herz-Morrey spaces of variable exponent, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 39 (2014), 389--416.
2. Yoshihiro Mizuta, Eiichi Nakai, Yoshihiro Sawano and Tetsu Shimomura, Littlewood-Paley theory for variable exponent Lebesgue spaces and Gagliardo-Nirenberg inequality for Riesz potentials, J. Math. Soc. Japan 65 (2013), 633--670.
3. Fumi-Yuki Maeda, Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Trudinger's inequality and continuity of potentials on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Potential Anal. 38 (2013) 515--535.
4. Fumi-Yuki Maeda, Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Bull. Sci. math. 37 (2013), 76--96.
5. Yoshihiro Mizuta, Ales Nekvinda and Tetsu Shimomura, Hardy averaging operator on generalized Banach function spaces and duality, Z. Anal. Anwend. 32 (2013), 233--255.
6. Fumi-Yuki Maeda, Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Mean continuity for potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces, RIMS Kokyuroku Bessatsu B43 (2013), 67--86.
7. Yoshihiro Mizuta and Takao Ohno, Sobolev's inequality for Riesz

potentials in central Lorentz-Morrey spaces of variable exponent, RIMS Kokyuroku Bessatsu B43 (2013), 101--120.

8. Yoshihiro Mizuta, Eiichi Nakai, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Morrey-Musielak-Orlicz spaces of variable exponent in R^n , Rev. Mat. Complut. 25 (2012), 413--434.
9. Toshihide Futamura, Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Orlicz-Sobolev capacity of balls, Illinois Math. J. 55 (2011), 543--553.
10. Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Weighted Orlicz-Riesz capacity of balls, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 4291--4302.

[雑誌論文](計 10 件)

[学会発表](計 件)

[図書](計 件)

[産業財産権]
出願状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織
(1)研究代表者
水田義弘(広島工業大学)

研究者番号: 00093815

(2)研究分担者
大野貴雄(大分大学)

研究者番号： 40508511

(3)連携研究者
()

研究者番号：