

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 20 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540193

研究課題名(和文)変数係数双曲型偏微分方程式のエネルギー減衰とその周辺

研究課題名(英文)Energy decay for hyperbolic partial differential equations with variable coefficients and its related topic

研究代表者

池島 良 (Ikehata, Ryo)

広島大学・教育学研究科(研究院)・教授

研究者番号：10249758

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円、(間接経費) 630,000円

研究成果の概要(和文)：臨界的に空間遠方で多項式減衰する摩擦項を持つ線形波動方程式のエネルギー減衰率の観点からの2重構造の存在の発見し、更に強い摩擦項を持つ抽象2階線形発展方程式の解の漸近形及び最良減衰率の特定及び非局所摩擦項を持つ波動方程式の解の精密な減衰率の特定に成功した。また、新しい改良型のFourier空間におけるエネルギー法を提示し、それを具体的ないくつかの発展方程式へ応用し、その全エネルギー及び解のあるノルムの(ほぼ)最良な減衰率を導出するに至った。

研究成果の概要(英文)：We discovered the existence of the double structure in the wave equations with damping terms decaying critically near infinity from the viewpoint of the energy decay rates. Secondly we caught the asymptotic profile of solutions to the strongly damped wave equations in the abstract framework. Thirdly, we derived precise decay estimates of solutions to the wave equations with non-local terms, which interpolates the weak and strong damping. Finally, we constructed a new modified energy method in the Fourier space, and the method could be well applied to the several concrete models in order to get the (almost) optimal decay estimates of solutions.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：波動方程式 摩擦項 エネルギー減衰 マルチプライアー法 フーリエ変換 拡散構造

## 1. 研究開始当初の背景

当該研究のモチベーションとしての基礎的な先行研究としては、1976年の松村氏(阪大)の定数係数の摩擦項を持つ線形波動方程式の解の時間無限大での減衰率を導出した先駆的な結果がまず挙げられる。この結果の特徴は、解の時間無限大での減衰率が、対応する熱方程式のそれと一致する、ということであり、それ以降の Damped Wave の研究は、(少なくとも)これを機に「その解に内在する拡散構造をどこに見出すのか?」という方向に向かっていったと言えよう。その後、実際に、1997年の西原氏(早稲田大)の研究が発端となって、「線形の Damped Wave の時間無限大での解の漸近形が、対応する(ある初期値を持つ)熱方程式の解に等しい」という事実を、研究代表者自身を含め、多くの「日本人」数学者の最大の関心事の一つとなり、関連する研究が一挙に盛んになって行った。一方で、G. Todorova 氏(テネシー大)及び B. Yordanov 氏(テネシー大)の共同研究によって、2001年に彼ら独自の「重み付きエネルギー法」によって、定数係数の巾型非線形項を持つ Damped Wave ( $\Omega$  全空間)における初期値問題について、熱方程式の理論では良く知られている藤田型臨界指数の特定問題と同様の結果が成り立つことが指摘され、それを機にこれまた一挙に「非線形」問題の関連する結果の導出が主要問題の一つとして扱われ多くの注目すべき結果が報告されていった。同時期の西原氏の3次元での Damped Wave の時間無限大での精密な漸近形の導出は特筆すべき結果であるといえるが、いずれにせよこれらのこの時期の結果の主な関心は、基本的に「定数係数」の Damped Wave である、という事実が大きく依存していたと言えよう。

定数係数の次なるケースとして、変数係数を扱うのは自然なことと思われる。この時期の変数係数に関連する問題としては、摩擦係数が(時間あるいは空間)変数依存型になり、特に、その摩擦係数が空間あるいは時間無限遠で適当なオーダーで(多項式)減衰し、その減衰速度とエネルギーの減衰・非減衰の関係を観ることが興味深い問題の一つとなっていた。この問題では、エネルギー減衰の観点からは、松村氏(1977)や上坂氏(1980)(日本大)そして近年では望月氏(中央大)と中澤氏(日本医大)の共同研究(1996)及び Wirth 氏(2007)(Stuttgart)等の研究があった。また、エネルギー非減衰の立場からは、望月氏(1976)による空間遠方で速く減衰する摩擦係数を持つ波動方程式の漸近的な双曲構造の研究があった。

さて、近年(2010前後) G. Todorova 氏と B. Yordanov 氏が、空間遠方で「劣」臨界的に減衰する空間変数のみに依存した摩擦係数を持つ波動方程式の(ほぼ)最良なエネルギー減衰率の導出に成功し、更に研究代表

者と G. Todorova 氏及び B. Yordanov 氏との3人での共同研究(2009)によって、「劣」臨界的に減衰する空間変数のみに依存した摩擦項と巾型非線形項を持つ半線形波動方程式の藤田型臨界指数を導出することに成功している。つまり、ある程度空間遠方でゆっくり減衰する摩擦項の場合には、依然としてその拡散構造が残っていることを臨界指数の立場から決り出した結果といえる。

## 2. 研究の目的

以下の5つについて主に考察した。

(1) 米国テネシー大学の2人の国際共同研究者との共同プロジェクトとして、摩擦係数が空間遠方で臨界的に(速くもなく遅くもなく)多項式減衰する場合の線形波動方程式の初期値問題を扱い、その解に対応する全エネルギーの最良な減衰率を特定すること。

(2) 問題(1)で扱った方程式に巾型非線形項を考え、その対応する藤田型臨界指数問題の解決を図り、その複雑な拡散構造を決りだす。

(3) 摩擦係数が空間遠方で「超」臨界的に(速く)多項式減衰する場合の半線形波動方程式の初期値問題を扱い、その対応する藤田型臨界指数問題の解決を図り、時間無限大での双曲構造を Strauss number の観点から決りだす。

(4) 強い摩擦項を持つ線形波動方程式の初期値問題を Hilbert 空間での抽象的な枠組みで扱い、壮大な一般性のもと、その解の拡散構造を捉えること。

(5) 構造的な内部摩擦を考慮した非局所項を持つ波動方程式は、通常の摩擦を持つ場合と強い摩擦を持つ場合とを補完するものになるが、その際の拡散構造の特徴をエネルギー減衰の立場から分類すること。

## 3. 研究の方法

(1) これまでに知られている関連する過去の研究成果の収集、最新の研究成果の動向調査及び共同研究者との研究連絡・情報交換のための海外渡航あるいは共同研究者招聘が重要であった。今回具体的には、上記研究目的(5)から派生した問題解決に当たって、Brazil の Santa Catarina 連邦大学数学科所属の二人の共同研究者である、Ruy Coimbra Charao 氏と Cleverson Roberto da Luz 氏を当該科研費で広島大学に招聘し、思いがけない結果を得るに至った。また、偏微分方程式関連の基礎的な邦書・洋書購入を行い、基礎知識の整理を行った。

(2) 研究年度3年目には、共同研究者であるブラジル連邦共和国サンタ・カタリーナ大学数学科の Ruy Coimbra Charao 氏を訪問し、

これまでの研究代表者の研究成果・経験を踏まえて、延べ 8 時間に及ぶ集中講義を行い、知識の整理・伝達を行った。

(3)最終年度には、論文作成や研究情報取得のために絶対に必要なパソコンの更新を行い、今後の研究環境の整備を行った。

#### 4. 研究成果

(1)下記文献「4」で得られた「画期的」な結果について要約する。空間遠方で「劣」臨界的にあるいは「超」臨界的に減衰する摩擦項を持つ波動方程式の初期値問題については、先述したように Todorova と Yordanov の共同論文や Mochizuki の論文においてすでにエネルギーの挙動の観点から、それぞれ減衰あるいは非減衰についての議論がなされているが、文献「4」では、そのどちらの場合でも無い、「臨界的」に空間遠方で減衰する摩擦項の場合が扱われ、その全エネルギーの減衰率について、「二つの構造」があることを初めて決りだすことに成功した。その対応する変数係数の摩擦項に深付与されている定数(パラメータ)がある程度以上なら、その全エネルギーの減衰率は、対応する熱方程式の厳密解と同じ減衰率をもつことが示された。これは時間無限大における当該方程式のある種の「方物型構造」を決りだした結果と言えよう。また、その付与された係数が小さいときには、対応するエネルギーの減衰率はその小さいパラメータに依存したオーダーで減衰することも示した。証明方法としては、これまで Todorova と Yordanov によって開発・応用されてきた重み付きエネルギー法(の修正版)を、研究代表者がこれまで別の研究で経験してきた Morawetz 流の解の  $L^2$ -有界性を得るための方法(研究代表者はその「修正版」の開発者の一人である)と組み合わせるといったアイデアを援用した。

(2)文献「3」で得られた結果について記す。ここでは強い摩擦項を持つ波動方程式を抽象化した、Hilbert 空間上の 2 階の発展方程式の初期値問題を扱い、その方程式の持つ「拡散構造」をエネルギー減衰及び抽象解の時間無限大での漸近形の観点から研究を行った。その結果、きちんとした形ではこれまで捉えられていなかった(と研究代表者には思われる)解の漸近形を抽象的に捉えることに成功し、応用範囲の広い定理を得るに至った。証明方法は、先行研究で Chill-Haraux によって公表されていたスペクトル解析の方法を Umeda-Kawashima-Shizuta 流の「抽象」Fourier 空間におけるエネルギー法と組み合わせることを援用した。

(3)文献「6」においては、上記文献「3」の方法に触発されて、具体的なユークリッド空間において Umeda-Kawashima-Shizuta 流の Energy method in the Fourier space を援用

して、通常の摩擦項と強い摩擦項を「補完」する「構造的な(Structural)」非局所摩擦項を持つ定数係数波動方程式の初期値問題を扱い、その対応する全エネルギー及び解の  $L^2$ -ノルムの最良(と思われる)これまでよりも精密な減衰率を導出することに成功した。ここで援用されたもう一つの重要な方法は、2003 年前後に研究代表者によって開発された Fourier 変換された初期値を巧い方法で初期値の空間平均を決りだすように分解するアイデアである。この 2003 年の方法は以外にも最近になって複数の海外の研究者達によって別の方程式(Timochenko system やら P-system など)の解の精密な減衰評価を得る研究でも援用されているようである。

(4)文献「1」「2」及び「5」で得られた一連の結果について報告する。ブラジル連邦共和国サンタ・カタリーナ大学数学科の 2 人の共同研究者である Ruy Coimbra Charao 氏と Cleverson Roberto da Luz 氏が 2012 年 6 月に広島大学に 1 カ月間研究連絡で来日した折に、3 人で文献「6」の結果を吟味することになった。その際「6」の結果のあるパラメータを 0 に形式的にすると、これまで知られている松村氏の結果と一致するはずなのだが、実際には「6」で得られた結果とは決定的な「ギャップ」があることが話題に挙がった。そこでその「ギャップ(パラメータ不連続性)」をどうやったら埋められるか、ということ議論した末に新たに開発されたのが、Fourier 空間におけるエネルギー法という梅田-川島-静田の方法を Haraux-Komornik の不等式と組み合わせる援用するアイデアである。これによってその「ギャップ」が連続的に埋められ(文献「5」)、その新しい方法が Plate 方程式(文献「2」)及び弾性方程式(文献「1」)に応用され、あらたにそれぞれの全エネルギーとその解の  $L^2$ -ノルムの厳密な評価式を得ることに成功した。この方法は現在も更に適用範囲を拡げ、抽象論の構成が現在継続的に共同研究として行われている。

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 7 件)

1. Ryo Ikehata, Ruy Coimbra Charao, Cleverson Roberto da Luz, Optimal decay rates for the system of elastic waves in  $R^n$  with structural damping, Journal of Evolution Equations, 査読有, 14, 2014, 197-210.

DOI: 10.1007/s00028-014-0216-8

2. Ruy Coimbra Charao, Cleverson Roberto da Luz, Ryo Ikehata, New decay rates for hyperbolic plate equations in  $R^n$  with a fractional damping, Journal of Hyperbolic Differential Equations, 査読

有,10, 2013, 1-13.

DOI 10.1142/S0219891613500203

3. Ryo Ikehata, Grozdna Todorova, Borislav Jordanov, Wave equations with strong damping in Hilbert spaces, Journal of Differential Equations, 査読有, 254, 2013, 3352-3368.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2013.01.023>

4. Ryo Ikehata, Grozdna Todorova, Borislav Jordanov, Optimal decay rate of the energy for wave equations with critical potential, Journal of Mathematical Society of Japan, 査読有, 65, 2013, 1-54.

doi: 10.2969/jmsj/06510183

5. Ruy Coimbra Charao, Cleverson Rioberto da Luz, Ryo Ikehata, Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, 408, 2013, 247-255.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.06.016>

6. Ryo Ikehata, Masato Natsume, Energy decay estimates for wave equations with a fractional damping, Differential and Integral Equations, 査読有, 25, 2012, 939-956.

<http://projecteuclid.org/die>

7. Ruy Coimbra Charao, Ryo Ikehata, Energy decay rates of elastic waves in unbounded domain with potential type of damping, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, 380, 2011, 46-56. doi:10.1016/j.jmaa.2011.02.075

〔学会発表〕(計9件)

1. Ryo Ikehata, History and recent trends on damped wave equations, Mini-Course at Department of Mathematics, Federal Univ. Santa Catarina, 2013年1月28日~1月31日, Federal Univ. Santa Catarina, Brazil

2. Ryo Ikehata, Energy decay estimates for wave equations with a fractional damping 9th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012年7月4日 Hyatt Regency Grand Cypress, Orlando, Florida, USA

3. 池畠 良, 空間遠方で臨界減衰する摩擦項を持つ波動方程式のエネルギー減衰につ

いての新展開, 日本数学会秋季総合分科会 函数方程式論分科会特別講演, 2011年9月30日, 信州大学

4. Ryo Ikehata, Energy decay for wave equations with damping terms decaying critically near infinity, The 4<sup>th</sup> MSJ-SI, Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, 2011年9月18日, Kyushu University

5. 池畠 良, ある変数係数波動方程式のエネルギー減衰率, 「微分方程式セミナー」 2011年6月6日, 名古屋大学多元数理科学研究科

6. 池畠 良, 変数係数消散型波動方程式のエネルギー減衰, 「松山解析セミナー2011」 2011年2月4日, 愛媛大学理学部

7. 池畠 良, 変数係数消散型波動方程式のエネルギー減衰評価, 「九州関数方程式セミナー」, 2011年1月21日, 福岡大学セミナーハウス

8. Ryo Ikehata, Optimal decay rate of the energy for linear wave equations with a critical potential,

8th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010年5月27日, Dresden University of Technology, Dresden, Germany

9. 池畠 良, 空間遠方で臨界減衰する摩擦項をもつ線型波動方程式のエネルギーの基礎的減衰評価, 「第75回応用解析セミナー」 2010年5月15日, 熊本大学大学院自然科学研究科

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池畠 良 (IKEHATA RYO)

広島大学・大学院教育学研究科・教授

研究者番号: 10249758