様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月２０日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010 ～ 2012
課題番号：22540194
研究課題名（和文） 漸近解析による逆問題の展開―散乱問題の視点から―

研究課題名（英文） Development of Inverse problems via asymptotic analysis -from the point of view of scattering theory

研究代表者 川下 美潮(KAWASHITA MISHIO)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80214633

研究成果の概要（和文）：この研究では熱方程式の境界値逆問題を「囲い込み法」により解析することを目標にした。無限回観測の場合にはほぼ予想通りの結果が得られ、一回観測のときには無限回観測のときと同じ定式化の発想を適用するのと全く別の考えで定式化することの２通りの考え方があることが分かった。問題としては後者の方が遙かに難しいが、前者であっても囲い込み法では初めて捉えられた量である穴や介在物と外側の境界との距離が求まることを確認した。 この事実の証明を通じて、この逆問題では「最初に内部の境界にぶつかる点までの長さ」を見ていることが明らかになった。

研究成果の概要（英文）：The theme of this research is to analyze inverse boundary value problems for the heat equations by "enclosure method". In the case that infinitely many measurements can be used, the expected results are obtained. In the case of one measurement, it is found that there are two different formulations. One is given by using similar thought to the case of infinitely many measurements. The other comes from a completely different idea. The latter one is much harder problem than former one. Even for the former problem, it is found that the distance between the boundary of the cavities or inclusions and the outside boundary is detected. Note that this amount is first caught in the setting of "enclosure method". From the proofs of these results, it is clarified that "the length from the outside boundary to the point hitting inside boundary first" is detected.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総 計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：函数方程式、境界値逆問題、熱方程式、囲い込み法、散乱逆問題

１．研究開始当初の背景

本研究代表者はこれまで弾性体の表面を伝わる波（表面波）自身が境界の形状変化により散乱されるという状況を反映した散乱理論の構成を行った上、その過程で得られた散

乱状態を特徴づける諸量についての解析を行ってきた。そこでは弾性表面波の散乱現象を記述する量（散乱核）の具体的な表示を求め、この表示を用いて弾性表面波の散乱を境界面上の双曲型方程式の散乱問題と見なす方法を確立することが大きな課題であった。

上の課題はこの方針でほぼ解決できた。その際、本質的な部分はこれらの散乱核の具体的な表示を弾性表面波に関する部分を取り出せる形で求めることができたことがひとつである。もう一つは弾性表面波の数学的な定式化にある。弾性表面波に対する特異性の伝播現象は数学的にみれば境界面上の１階主要型擬微分方程式の解として与えられる。表面波の入射方向と摂動を経て出てくる方向（入射方向とは異なる）を決めたとき、１番早く出てくる特異性が散乱核に与える影響がわかる。それによれば弾性表面波はあたかも境界面上におけるある種の双曲型方程式に支配され、この方程式に対する散乱問題として解釈できることが明らかになった。

副産物ではあるが本研究で得た表示により散乱核の表示公式に対する解釈を新たにする方が良いことが分かった。従来は入射平面波とその反射波による表示であるという直感的にも受け入れやすい解釈が成されていた。一般的には非摂動系における平面波と摂動系における補正項による表示と見なす必要があり、単なる反射現象としての解釈は適切ではないことがこの研究により明らかになった。

この研究と本研究課題とは一見すると直接のつながりがないように思われるかも知れない。しかしこれらは「漸近解析」の視点から見れば、深くつながっていることが当時予想された。申請者は本研究課題の連携研究者である池畠優氏(群馬大学)との共同研究で、熱方程式の境界値逆問題を「囲い込み法(enclosure method)」により考察するときに表れる漸近パラメータを含んだ境界値問題の解から必要な情報を抽出することができるかについて調べた。そのとき本質的に用いたのが「漸近解析」であった。この研究を通じて私はこれまでに行っていた研究と本研究課題とのつながりを認識したことがきっかけとなり、本研究を申請するに至ったのが研究開始当初の背景である。

２．研究の目的

本研究では次の境界値逆問題と散乱逆問題について考察することを目標にした。

(1) 熱方程式の境界値逆問題を「囲い込み法」の視点から解析する。

(2) 弾性表面波に対する定常問題に関する散乱逆問題を解析する。

「研究開始当初の背景」の欄で述べたように本研究代表者は本研究課題の連携研究者である池畠優氏(群馬大学)との共同研究で上の課題(1)に相当する研究を最近行った。そこで扱った逆問題は熱方程式に対する境界値逆問題の一種である。この問題における解析の本質は漸近パラメータを大きくしたときに解の挙動がどうなるかについて調べることであった。その点において本研究代表がこれまで主に研究してきた散乱問題における漸近解析が本質的に有効であった。この経験が本研究課題を意識するようになった大きな理由であり、本研究課題名を敢えて「漸近解析による逆問題の展開―散乱問題の視点から―」としたのもこの背景があったからである。

境界値逆問題は長い歴史を持っているがほとんどの場合は定常問題を対象にしていた。今でこそ、時間の入った問題に対する逆問題も盛んに研究されているが、本研究課題を申請した頃は、熱方程式のように時間に依存した問題についてはあまり考察されておらず、これからの研究課題であると感じられた。これらが研究目標の欄で具体的な目標として(1)を掲げた理由である。なお、(1)で「囲い込み法」に限定した理由は「研究の方法」の欄で改めて述べる。

最初に述べたこれまでの研究代表者による研究のうち本研究と特に関係がある部分をより詳しく述べる。

- 弾性表面波に対する時間を考慮した散乱問題の定式化について考察した。
- 弾性表面波の散乱現象を記述する量（散乱核）の具体的な表示を得た。これらの成果により弾性表面波に対する散乱核についての逆問題が定式化可能になった。
- 弾性表面波の入射方向と摂動を経て出てくる方向（入射方向とは異なる）を決めたとき、１番早く出てくる特異性が散乱核に与える影響が明らかになった。

上で得た結論は弾性表面波についての散乱核の特異性が初めて表れる位置を見れば「散乱データ」と呼ばれているものが得られることを意味している。Riemann計量を散乱データから回復できるかというのは古くから考えられている逆問題である。このように弾性表面波に対する散乱核を観測データとした

逆問題は境界のRiemann計量を表面波がもたらす散乱データから回復できるかという逆問題に帰着できることが明らかにされた。

このようにこれまでの本研究代表者が行ってきた研究には逆問題の要素も含まれていた。しかし近年の逆問題の進展を見れば、定常問題に対する散乱逆問題についても考察すべきである。表面波に対するこの手の問題はまだ手つかずと言ってもよく、今後視野に入れるべき課題と思う。これが研究目標の一つとして(2)の課題を掲げた理由である。

逆問題は広汎である。その中で上に掲げた課題には本研究代表者による散乱問題に対する研究で培った漸近解析の発想が有効であると期待している。さらにその裏付けも本研究代表者らによる研究からある程度与えられている。本研究では上記の逆問題についての直接の寄与に加え、その奥に潜む微分方程式論の視点から見た構造を明らかにして行きたいと考えつつ取り組んだ。

３．研究の方法

研究期間は 3 年間（平成 22 年度～24 年度）であった。まず研究開始時に「２．研究の目的」の欄で述べた研究課題を次のように細分化して取り組むことを考えた。

(1) 熱方程式の境界値逆問題に対する「囲い込み法」による考察。

- (i) どのような漸近パラメータ付きの境界値問題の考察に帰着できるかを決定する。
- (ii) (i)の解から必要な情報を抽出する(解の近似の構成、解自身の構成など。

(2) 弾性表面波に対する定常問題における逆問題の考察。

- (i) 周波数一定の弾性表面波に対する散乱逆問題を定式化するために必要となる順問題について調べる。
- (ii) 逆問題に対して何らかの情報を得るためにどのような漸近解析の問題に帰着できるか、およびその解析手段について考察する。

初年度（平成 22 年度）は主に(1)について今後の研究進展のための準備を行うことを目標に研究を進めた。まず、これまでの研究状況や現時点における国内外の関連した研究の到達度を確認し、本研究に関する理解を深め、課題をより深く検討するという作業を行った。

(1)では考察対象を「囲い込み法」に限定した。その理由は他の逆問題の定式化の範疇から外れているからである。微分方程式により定式化される逆問題についてはこれまで「探針法(probe method)」、「No-response test」、「Linear sampling method」や「Singular source method」などが提唱された。当時これらはそれぞれ独立したものと考えられていたが、中村玄氏ら(Nakamura, Honda, Potthast and Sini)により定常問題の境界値逆問題に対してはこれらの方法は数学的には同値であることが証明された。一方、「囲い込み法」はいまでもこれらの方法とは違うものと思われている。だから「囲い込み法」に限定して熱方程式の境界値逆問題を考察することは逆問題全体から見て意味があると思われる。

熱方程式に対する境界値逆問題における観測データは境界における温度と熱流(温度勾配)の組である。この組から内部情報を知る手順について考えるのが課題である。一般にはそのために必要となる観測データの個数は少ない方がよい。観測データが無限個必要(すなわち無限回の観測を行うことを許す)か、それとも有限個で済むか、この違いは実際に観測することを考えれば明らかである。以下無限個の観測データが必要なとき「無限回観測」、そうでないとき「有限回観測」、一度だけでよいとき「一回観測」という。

課題(1)について、本研究代表者と連携研究者の池畠優氏は無限回観測で、内部構造が穴(境界はある程度なめらか)のみであることが事前に分かっている場合に穴の凸包を知ることができることを示した。この結果を踏まえて初年度は主に次の項目について考察した。

- 介在物などの穴以外の内部構造について、無限回観測を許したときに穴の場合と同様のことができるか。
- 無限回観測を許すのを認めると観測データの種類をいろいろ変えることができる。この変化を利用して凸包以外の内部の情報を得ることができるか。

もちろん上に述べた(1)の(i)、(ii)の順に考えた。(i)についてはこれまで池畠氏により行われた定常問題に対する仕事との比較が重要かつ参考になる。これが池畠氏に連携研究者としての協力を依頼した理由の一つであった。(ii)は本研究代表者が主だって研究する部分である。上述の穴の凸包を知る研究では(ii)に相当する部分で散乱論における漸近解析が本質的に役立った。上の研究課題についても同様な方向で調べることを実行した。初年度の大きな目標はそれを確かめ、平成 23 年度以降につなげることにある。そのためにも池畠氏と連携して(i)に対する検討をきちんとしておくことが重要であった。

無限回観測のときは観測データをかなり自由に選ぶことができる。よって、様々な定式化が提唱可能になることが予想された。そ

こでそれらの整理が必要で、どういう設定が重要かつ自然かについての検討を行う必要があった。さらに我々の研究の方向性が適切かどうか、研究全体における位置づけはどうあるべきかなどについて適宜確認する必要もあった。そのため逆問題や散乱問題をはじめ関連した研究を行っている研究者を適宜招聘、もしくはこちらが研究機関や研究集会などに出向き、討論や情報交換を行うことが本研究を進める上で最も重要になった。本研究は研究代表者と連携研究者の合計２名のみの構成であったが、これらのことを考慮して初年度のみならず全体的に旅費を多く計上した。本研究費のおかげで本研究は円滑に行うことができた。

(1)について次に行うべきことは有限回観測や一回観測の場合についての考察であった。これらについては平成 22 年度の研究成果を見ながら 23 年度以降に取り組んだ。直感的には一回観測よりも有限回観測の方が内部情報についてより詳しいことが分かると予想されていたが、これが本当であることはまだきっちりとは示されていない。できればこれについて明らかにしたかったが、予想した通り、それはかなり難しい問題であった。このような状況から、まずは定常問題のときに先行研究がある一回観測のときに焦点を絞って研究を進めた。

一回観測のときは無限回観測のときに比べて(ii)における解の構成を格段に詳しく行わないといけない。それだけに問題は難しくなった。そのため当初計画通りまずは内部情報として穴の凸性などの具体的な先見情報を仮定し、ポテンシャル論を用いることにより解の構成を行う方針をとった。

研究目的の欄に掲げた課題(2)であるが、これは(1)の課題がある程度実行できた段階で行うか、逆に(1)が完全に行き詰まるときには研究課題の(2)の(i)についての考察に移行することを想定していた。幸い、課題(1)の研究が順調に進んだこともあり、本研究期間中は(1)の研究に従事した。

４．研究成果

「３．研究の方法」の欄で述べたように「２．研究の目的」の欄で述べた研究課題(1)、(2)のうち主に(1)についての考察を行った。熱方程式における境界値逆問題については、無限回観測で、内部構造が穴(境界はある程度なめらか)のみであることが事前に分かっている場合には穴の凸包を知ることができることが確かめられていた。我々のこの研究成果を踏まえ、平成 22 年度は介在物などの穴以外の内部構造についても無限回観測を許したときに穴の場合と同様のことができるかについて調べた。

介在物の場合は穴の場合とは使う恒等式が異なり、新たな考察が必要になった。考察の主要な部分は、漸近パラメータ付きの境界値問題の近似解から得られた境界積分の下からの評価を行うことにある。このパラメータつきの境界積分の評価が穴の場合よりは少し複雑になったが、無限回観測を許しているので、少し工夫することにより扱うことが出来、結果として、穴の場合と同様、囲い込み方が有効であることを確認した。さらに、凸包以外の情報も得られることもわかった。

次の課題は、一回観測のときにはどうなるかについて調べることであった。一回観測のときには大きく分けて２通りの定式化が考えられる。そのうちの一つは無限回観測のときと同じ発想を一回観測の場合にも適用することから導かれる。このときは穴や介在物と外側の境界との距離が求まることを確認した。この量は囲い込み法では初めて捉えられたものである。平成 22 年度に行った無限回観測のときの研究と一回観測のときの考察結果とを比較することにより、今回の結果が本質的に新しいことを含んでいることが確認できた。定式化の発想が似ていることから、途中までは無限回観測、一回観測に共通した議論にまとめることができ、ともにパラメータ付き楕円型問題の解の漸近挙動を調べることに帰着されることが分かった。無限回観測のときとの違いは、選べる解が外側の境界のみをおいたときの境界値問題の解しか使えないということにある。この解はポテンシャル論を用いて構成し、その表示から漸近挙動を導くことにより結論を得た。この証明から「最初に内部の境界にぶつかる点までの長さ」を見ていることが明らかになった。

当初の本研究計画に従えば、「２．研究の目的」の欄で述べた(2)の研究課題について考察を進めるべきであったが、これまでの(1)の考察で得た研究成果を踏まえ、「最初に内部の境界にぶつかる点までの長さ」を見ているという現在の見解が本当に正しいのかどうかについて調べることを優先させた。

一般に、境界値逆問題の研究では、観測データに関してこれまで次の２通りの場合が本研究の遂行に伴い調べられてきた。

(i) 無限回観測（無限個の観測データを用いることを認める設定）の場合。

(ii) 一回観測（一回の観測しか許さない設定）であるが、無限回観測のときと同じ発想、定式化を適用した設定の場合。

一回観測では(ii)と異なり、無限回観測のときとは異なる設定も考えられる。最終年度である平成 24 年度は、この新たな設定の場合に囲い込み法の設定が「最初に内部の境界にぶつかる点までの長さ」を見ていることになっているのかどうかについて調べた。(i)、

(ii)では、内部構造が穴、または介在物(境界はある程度なめらか)のみであることが事前に分かっている場合の両方について調べられていたが、この場合は(i)、(ii)のときよりも制約が大きく、内部構造が穴のみで、穴の形は強い意味で凸であるという仮定のもとで考察した。
内部構造に対する先見情報の仮定は強くせざるを得なかったが、平成 23 年度までに明らかにされてきた「最初に内部の境界にぶつかる点までの長さ」を見ているという見解は正しいことが確認できた。

５．主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計４　件)

① M. Ikehata and M. Kawashita, Estimates of the integral kernels arising inverse problems for a three-dimensional heat equation in thermal imaging, Kyoto Journal of Mathematics 査読有 掲載決定.

② M. Kawashita and K. Suzuki, Local energy decay for wave equations in exterior domains with regular or fast decaying dissipations, SUT Journal of Mathematics 47, No. 2, 査読有 (2011) pp. 143-159.

③ M. Kawashita and H. Sugimoto, Weighted energy estimates for wave equations in exterior domains, Forum Math. 23　査読有 (2011) pp. 1217-1258.

④ M. Ikehata and M. Kawashita, On the reconstruction of inclusions in a heat conductive body from dynamical boundary data over a finite time interval. Inverse Problems 26 査読有 (2010), no. 9, 095004.

〔学会発表〕(計６件)

① 川下美潮　Energy decay properties for dissipative wave equations in exterior domains, 非線形波動方程式とその周辺に関する研究集会、平成 25 年 2 月 2 日、北海道大学

② 川下美潮　Enclosure methods for the heat equations, TAIWAN-JAPAN Joint Conference on PDE and Analysis, 平成 24 年 12 月 27 日、國立臺灣大學 數學系　臺灣

③ 川下美潮　Estimates of the integral kernels for the boundary integral operators, 偏微分方程式の逆問題解析とその周辺に関する研究、平成 24 年 11 月 21 日、京都大学数理解析研究所

④ 川下美潮　熱方程式に対する囲い込み法とレゾルベントの漸近挙動、2012 年日本数学会年会函数方程式論分科会特別講演、平成 24 年 3 月 28 日、東京理科大学

⑤ 川下美潮 The enclosure method for the heat equations in bounded domains with cavities, 武漢大学学術報告、平成 24 年 3 月 9 日、中華人民共和国武漢大学数学統計学院

⑥ 川下美潮 Asymptotic behaviour of the resolvent and enclosure method for the heat equations in bounded domains with a cavity, 幾何学的偏微分方程式における保存則と 正則性特異性の研究、 平成 23 年 6 月 8 日、京都大学数理解析研究所

６．研究組織
(1)研究代表者
川下　美潮(KAWASHITA　MISHIO)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80214633

(2)研究分担者
いません

(3)連携研究者
池畠　優(IKEHATA MASARU)
群馬大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：90202910