

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 11 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540196

研究課題名(和文)リーマン面の正則写像の研究 写像の存在問題における把手の役割

研究課題名(英文) Research on holomorphic mappings of Riemann surfaces----roles of handles played in the existence problem of holomorphic mappings

研究代表者

増本 誠 (Masumoto, Makoto)

山口大学・理工学研究科・教授

研究者番号：50173761

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：リーマン面は連結な1次元複素多様体であるが、位相的には表裏の区別をつけられる曲面であり、一般にいくつかの把手を有している。とくに、トーラスから1点を除いて得られる面と同相なリーマン面を穴あきトーラスと呼ぶ。穴あきトーラスの全体は実3次元の空間をなしている。本研究では、種数正のリーマン面とそれの把手を一つ指定したものをYを固定し、穴あきトーラスXのうち、Yの中への正則写像で指定した把手に写されるようなものが存在するX全体の集合Aを考察し、XからYへの有限葉正則写像が存在するX全体のなす部分集合Bと比較した。その結果、AはBの閉包であり、少数の例外を除いてBはAの真部分集合であることを見出した。

研究成果の概要(英文)：A Riemann surface is a connected complex manifold of dimension one, which is topologically an orientable surface and hence has several handles in general. A Riemann surface homeomorphic to the surface obtained from a torus by removing one point is called a once-holed torus. The once-holed tori make a space of real dimension three. In the present research we fix a Riemann surface Y with a marked handle. We investigate the set A of once-holed tori X for which there is a holomorphic mapping X into Y whose image corresponds to the marked handle, and compare A with the subset consisting of once-holed tori X which allow holomorphic mappings of finite degree into Y. It turns out that A is the closure of B and that B is a proper subset of A unless Y is a torus or a once-holed torus.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・解析学基礎

キーワード：リーマン面 正則写像 極値的長さ 穴あきトーラス

1. 研究開始当初の背景

リーマン面間の正則写像においては、ごくわずかな位相的または解析的条件を課することが実は非常に強い制限をその正則写像やリーマン面に設けたことになってしまう、という現象が見られる。換言すれば、与えられたリーマン面間には所要の条件を満たす正則写像が必ずしも存在しないのである。そのような現象を広範かつ組織的に研究し、どのようなリーマン面の間に与えられた性質を持つ正則写像が存在するか、または存在しないか、リーマン面のモデュライ空間の上に描き出してみたい。これがこの研究の出発点であった。

リーマン面上の正則関数や有理型関数は、それぞれ複素平面やリーマン球面の中への正則写像と見なすことができる。それらの研究の歴史は大変古く、また多くの結果も知られている。これに比べて、一般のリーマン面の中への正則写像の存在に関する研究はあまり多くないが、種数有限な開リーマン面を同種数の閉リーマン面の中へ単射正則に埋め込む研究が 1980 年代から新しい視点で始められていた。本研究はこれを受け継ぎ、発展させた位置にあるということもできよう。

2. 研究の目的

本研究の目的は、リーマン面から他のリーマン面の中への正則写像について、リーマン面の複素構造を決定する様々なモデュライや等角不変量と関連させつつ、複素解析学的手法を中心とする種々の方法で研究し、その結果をタイヒミュラー空間論など複素解析学の他の分野に応用することである。本研究では、とくに、リーマン面の把手が正則写像の存在や正則写像の挙動にどう関わっているか調べる。

3. 研究の方法

問題の性格とこれまでの歴史から考えて、閉リーマン面を扱う場合と開リーマン面を扱う場合とでは、ふさわしい手法に大きな隔たりがあるように思われる。そこで、閉リーマン面の正則写像を研究するグループと開リーマン面を研究するグループを設けた。いずれのグループでも複素解析学的手法が研究の中心を占めるが、それに加えて、前者では代数学的手法を、後者では実解析学的手法を試みた。さらに、多様な例を作って研究の進展に資するため、数値実験をするグループも設けた。

各自の研究成果やアイディアは、山口大学と広島大学で開催される研究会で発表され、検討された。さらに、山口大学において、リーマン面を主題とする研究集会を 4 回開催し、内外の研究者と討論や情報交換を行った。また、国内外で開催される学会・研究集会にも積極的に参加して、成果を発表し、最新の情報を得るよう努力した。とくに、2012 年にギリシャで開催された第 6 回非線型解析学者

世界会議において分科会“Nonlinear problems on Riemann surfaces (リーマン面上の非線型問題)”を主宰したことは、研究の進展に大いに役立った。

4. 研究成果

(1) 準備

R を種数正のリーマン面、すなわち、把手を持つリーマン面とする。 R 上の交点数が 1 である単純閉曲線の対 $\alpha = \{a, b\}$ を R の把手の印という。そして、組 $Y = (R, \alpha)$ を、把手を指定したリーマン面と呼ぶ。

R' を種数正の別のリーマン面、 $\alpha' = \{a', b'\}$ を R' の把手の印とし、 $Y' = (R', \alpha')$ とおく。 R から R' の中への正則写像 f は、 a, b をそれぞれ a', b' と自由にホモトピックな曲線に写すとき、 Y から Y' の中への正則写像であるという。さらに f が単射であるとき、 Y から Y' の中への等角写像であるという。

種数 1、境界成分の個数が 1 の開リーマン面を穴あきトーラスと呼ぶ。把手を指定した穴あきトーラスは印付き穴あきトーラスと呼ばれる。二つの印付き穴あきトーラスは、一方から他方の上への等角写像が存在するとき、同じであると思なすことにすると、印付き穴あきトーラスの全体 T は、境界付 3 次元実解析的多様体となる。 T の元 X_1, X_2 に対し、 X_1 から X_2 の中への等角写像が存在するとき、 $X_1 \rightarrow X_2$ と書く。すると、 T は T 上の半順序である。

(2) 種数 1 の開リーマン面の等角写像

R_0 を種数 1 の開リーマン面とし、 R_0 の把手の印 $\alpha_0 = \{a_0, b_0\}$ を選ぶ。 R_0 から種数正のリーマン面 R への等角写像 f は、 R_0 の基本群の f による像が像曲線 $f(a_0), f(b_0)$ で生成されるとき、単純であるといわれる。等角写像 f が単純であるか否かは α_0 によらず f だけで定まる。

本研究で得られた、単純な等角写像に関する成果を述べる前に、比較のため、以前の研究で得られた結果を述べよう。 $Y_0 = (R_0, \alpha_0)$ とおき、 T の部分集合 $T[Y_0]$ を、条件

「 Y_0 から把手を指定したリーマン面 Y の中への単純な等角写像が存在すれば、 X から Y の中への等角写像も存在する」

を満足する印付き穴あきトーラス X 全体の集合とする。このとき次の命題が成り立つことを証明し、2007 年に論文として発表した。

命題 1. $T[Y_0]$ は必ず最大元をただ一つ持つ。

この命題は、単位円板上の正規化された単葉関数に関する古典的な Koebe の四分の一一定理の類似物であると思なすことができる。

さて、命題 1 において、把手の印は必要なのかという疑問が生じる。より詳しく説明するために、記号を導入する。穴あきトーラス

の全体を T と書く。もちろん, 互いに等角同値である二つの穴あきトーラスは同一視する。 T の元 S_1, S_2 に対し, S_1 から S_2 の中への等角写像が存在するとき, $S_1 \rightarrow S_2$ と書く。すると, T は T 上の半順序である。 T の部分集合 $T[R_0]$ を, 条件

「 R_0 から種数正のリーマン面 R の中への単純な等角写像が存在すれば, S から R の中への等角写像も存在する」

を満足する印付き穴あきトーラス S 全体の集合とする。このとき, $T[R_0]$ も最大元を持つであろうか。この問題に対し次の解答を得た。

定理 1. R_0 は位相的に有限であるとする。このとき, $T[R_0]$ が最大元を持つための必要十分条件は, R_0 が種数 1 の閉リーマン面から有限個の点を取り除いて得られるリーマン面に等角同値であることである。

命題 1 とは対照的な結果である。把手の印とともに考察することが単に技術的なことではないことを示唆して大変興味深い。定理 1 は下記〔雑誌論文〕の第 11 論文に発表した。

(3) 穴あきトーラスの正則写像

把手を指定したリーマン面 Y_0 を固定する。印付き穴あきトーラス X のうち, X から Y_0 への正則写像が存在するもの全体の集合を $T_a[Y_0]$ と表す。正規族の理論を使えば, 次の事実は容易に確かめられる。

命題 2. $T_a[Y_0]$ は T の閉集合である。

次に, X から Y_0 への有限葉正則写像が存在する $X \in T$ 全体の集合を $T[Y_0]$ と表す。ここで, リーマン面 R_1 から R_2 への正則写像が有限葉であるとは, R_2 の各点の原像の個数が一定の有限数を超えないことを意味する。 $T[Y_0]$ は $T_a[Y_0]$ の部分集合であるが, 両者の関係について, 次の定理が得られた。

定理 2. Y_0 が種数 1 の閉リーマン面でも穴あきトーラスでもなければ, $T[Y_0]$ は $T_a[Y_0]$ の真部分集合である。

差集合 $T_a[Y_0] - T[Y_0]$ に属する印付き穴あきトーラスを実際に見出すことにより定理 2 は証明される。しかし, 次の定理が示すように, $T[Y_0]$ と $T_a[Y_0]$ の違いは大きくない。

定理 3. (1) $T[Y_0]$ は $T_a[Y_0]$ の内部を含む。
(2) $T[Y_0]$ の閉包は $T_a[Y_0]$ に等しい。

定理 2 と定理 3 より次の定理が導かれる。

定理 4. Y_0 が種数 1 の閉リーマン面でも穴あきトーラスでもなければ, $T[Y_0]$ は閉集合で

はない。

これらの結果は, 下記〔雑誌論文〕の第 3 論文に発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 14 件)

- 1) Yasushi Hataya, Masaaki Ito and Masa-kazu Shiba, A Poiseuille flow of an incompressible fluid with nonconstant viscosity, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **13** (2013), 47-53, 査読有 <http://www.e-ndst.kiev.ua/>
- 2) Yasushi Hataya, Masaaki Ito and Masa-kazu Shiba, Poiseuille flow with spherical paraboloid velocity, *Complex Analysis and Potential Theory*, **10** (2013), 155-161, 査読有
- 3) Makoto Masumoto, On critical extremal lengths for the existence of holomorphic mappings of once-holed tori, *Journal of Inequalities and Applications*, **2013**:282 (2013), 1-4, 査読有 DOI: 10.1186/1029-242X-2013-282
- 4) Allu Vasudevarao and Hiroshi Yanagihara, On the growth of analytic functions in class $U(\quad)$, *Computational Methods and Function Theory*, **13** (2013), 613-634, 査読有 DOI: 10.1007/s40315-013-0045-8
- 5) Rintaro Ohno and Hiroshi Yanagihara, On a coefficient body for concave functions, *Computational Methods and Function Theory*, **13** (2013), 237-251, 査読有 DOI: 10.1007/s40315-013-0018-y
- 6) Saminathan Ponnusamy, Hiroshi Yamamoto and Hiroshi Yanagihara, Variability regions for certain families of harmonic univalent mappings, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **58** (2013), 23-34, 査読有 DOI: 10.1080/17476933.2010.551200
- 7) Akira Yamada, Inequalities for Gram matrices and their applications to reproducing kernel Hilbert spaces, *Taiwanese Journal of Mathematics*, **17** (2013), 427-430, 査読有 DOI: 10.11650/tjm.17.2013.2282
- 8) Makoto Masumoto, Conformal and holomorphic mappings of once-holed tori, *Global Journal of Mathematical Sciences*, **1** (2012), 24-30, 査読有 <http://www.ifnaworld.org/ojs/index.php/GJMS/issue/view/7/showToc>
- 9) Akira Yamada, Oppenheim's inequality and RKHS, *Mathematical Inequalities &*

- Applications, **15** (2012), 449-456, 査読有
DOI: dx.doi.org/10.7153/mia-15-39
- 10) Yasushi Hataya, A remark on Beale-Nishida's paper, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, **6** (2011), 293-303, 査読有
http://w3.math.sinica.edu.tw/bulletin/
 - 11) Makoto Masumoto, Corrections and complements to "Once-holed tori embedded in Riemann surfaces", Mathematische Zeitschrift **267** (2011), 869-874, 査読有
DOI: 10.1007/s00209-009-0650-4
 - 12) Akira Yamada, Saitoh's inequality and Opital's inequality, Mathematical Inequalities & Applications, **14** (2011), 523-528, 査読有
DOI: dx.doi.org/10.7153/mia-14-44
 - 13) Hiroshi Yanagihara, Variability regions for families of convex functions, Computational Methods and Function Theory, **10** (2010), 291-302, 査読有
DOI: 10.1007/BF03321769
 - 14) Takao Terada and Hiroshi Yanagihara, Sharp distortion estimates for p-Bloch functions, Hiroshima Mathematical Journal, **40** (2010), 17-36, 査読有
http://projecteuclid.org/euclid.hmj/1270645080
- [学会発表](計 35 件)
- 1) 柴 雅和, 山口 博史, 開リーマン面の閉リーマン面への等角的埋め込み 実現された理想境界の形状, 日本数学会 2014 年度年会函数論分科会, 2014 年 3 月 15 日, 学習院大学 (東京都豊島区)
 - 2) 幡谷 泰史, Decay properties of viscous surface flow without surface tension, The 6th Nagoya Workshop on Differential Equations, 2014 年 3 月 10 日, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 (名古屋市)
 - 3) 増本 誠, Once-holed torus の有限葉正則写像について, 平成 25 年度日本数学会中国・四国支部例会, 2014 年 1 月 26 日, 島根大学総合理工学部 (松江市)
 - 4) 幡谷 泰史, Decay properties of viscous free surface flows, 微分方程式の総合的研究, 2013 年 12 月 21 日, 東京大学大学院数理科学研究科 (東京都目黒区)
 - 5) 増本 誠, On the critical extremal lengths for the existence of conformal mappings of once-holed tori, 研究集会「リーマン面論の展望」, 2013 年 12 月 8 日, 山口大学理学部 (山口市)
 - 6) 山田 陽, 再生核空間と Hilbert 空間, 研究集会「リーマン面論の展望」, 2013 年 12 月 8 日, 山口大学理学部 (山口市)
 - 7) Hiroshi Yanagihara, Circular symmetrization, subordination and arclength problems on convex functions, The 2nd GSIS-RCPAM International Symposium "Geometric Function Theory and Applications in Sendai", 2013 年 11 月 10 日, 東北大学大学院情報科学研究科 (仙台市)
 - 8) Masakazu Shiba, Theory of univalent functions on a Riemann surface, The 2nd GSIS-RCPAM International Symposium "Geometric Function Theory and Applications in Sendai", 2013 年 11 月 10 日, 東北大学大学院情報科学研究科 (仙台市)
 - 9) 増本 誠, On the existence of holomorphic mappings of once-holed tori, 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 2013 年 11 月 10 日, 大阪大学大学院理学研究科 (豊中市)
 - 10) Makoto Masumoto, On the existence of holomorphic mappings of once-holed tori, Workshop on harmonic and quasiconformal mappings of Riemann surfaces", 2013 年 9 月 11 日, 山口大学理学部 (山口市)
 - 11) Hiroshi Yanagihara, Quasiconformal mappings and variational formulas in function theory, インド工科大学カラグプール校数学教室談話会, 2013 年 3 月 21 日, インド工科大学カラグプール校, カラグプール (インド)
 - 12) 増本 誠, Conformal and holomorphic mappings of once-holed tori, 研究集会「リーマン面論の展望」, 2012 年 12 月 15-16 日, 山口大学理学部 (山口市)
 - 13) Hiroshi Yanagihara, The growth estimate for $U(\cdot)$, 等角写像論・値分布論合同研究集会, 東京工業大学 (東京都目黒区)
 - 14) Makoto Masumoto, Handle conditions and basic extremal lengths of marked once-holed tori, The Sixth World Congress of Nonlinear Analysts, 2012 年 6 月 25 日, University of Athens, アテネ (ギリシャ)
 - 15) Akira Yamada, Douglas' factorization theorem and RKHS, The Sixth World Congress of Nonlinear Analysts, 2012 年 6 月 25 日, University of Athens, アテネ (ギリシャ)
 - 16) Yasushi Hataya, Solution formula of Stokes operator with stress free boundary conditions, The Sixth World Congress of Nonlinear Analysts, 2012 年 6 月 25 日, University of Athens, アテネ (ギリシャ)
 - 17) 山田 陽, 再生核空間とその応用, 日本数学会 2012 年度年会函数論分科会, 2012 年 3 月 26 日, 東京理科大学 (東京都新宿区)

- 18) 幡谷 泰史, 伊藤 雅明, 柴 雅和, 非ユークリッド的 Hagen-Poiseuille 則, 平成 23 年度日本数学会中国・四国支部例会, 2012 年 1 月 22 日, 岡山大学環境理工学部 (岡山市)
- 19) 幡谷 泰史, Decay properties of free surface flow without surface tension effect, 若手による流体の基礎方程式研究集会, 2012 年 1 月 5 日, 名古屋大学 (名古屋市)
- 20) 増本 誠, リーマン面の接続と射影構造, 研究集会「リーマン面論の展望」, 2011 年 12 月 21 日, 山口大学理学部 (山口市)
- 21) 柴 雅和, Riemann 面の等角写像と Poiseuille 流, 等角写像論・値分布論研究集会, 2011 年 12 月 4 日, 金沢大学サテライトプラザ (金沢市)
- 22) 増本 誠, 種数有限な開リーマン面のコンパクト接続のなす空間, 等角写像論・値分布論研究集会, 2011 年 12 月 4 日, 金沢大学サテライトプラザ (金沢市)
- 23) 増本 誠, Spaces of compact continuations of Riemann surfaces II, connectedness, ポテンシャル論セミナー, 2011 年 11 月 25 日, 名城大学理工学部 (名古屋市)
- 24) 増本 誠, Spaces of compact continuations of Riemann surfaces I, compactness, ポテンシャル論セミナー, 2011 年 11 月 18 日, 名城大学理工学部 (名古屋市)
- 25) 幡谷 泰史, 伊藤 雅明, 柴 雅和, 球面的距離により修正された Poiseuille, 平成 23 年度日本数学会周期総合分科会関数方程式論分科会, 2011 年 10 月 1 日, 信州大学 (松本市)
- 26) Yasushi Hataya, Decay estimates of viscous surface flow without capillary, Academia Sinica seminar, 2011 年 3 月 14 日, Academia Sinica, 台北 (台湾)
- 27) 幡谷 泰史, Decay estimates of free surface flow without capillary, 数値解析・応用解析セミナー, 2011 年 2 月 10 日, 京都大学大学院情報学研究科 (京都市)
- 28) 柴 雅和, 非古典的な Poiseuille 流, 日本数学会中国・四国支部例会, 2011 年 1 月 30 日, 鳴門地域地場産業振興センター (鳴門市)
- 29) 山田 陽, Oppenheim's inequality and RKHS, 第 19 回関数空間セミナー, 2010 年 12 月 23 日, 北海道大学理学部 (札幌市)
- 30) 幡谷 泰史, 自由表面を伴う粘性流体の解の減衰評価, 第 8 回浜松偏微分方程式研究集会, 2010 年 12 月 20 日, 静岡大学工学部 (浜松市)
- 31) Makoto Masumoto, Measuring the sizes of handles of Riemann surfaces, The 13th Conference on Real and Complex Analysis in Hiroshima (2010), 2010 年 12 月 20 日, 広島大学学士会館 (東広島市)
- 32) Makoto Masumoto, Once-holed tori embedded in Riemann surfaces, The 1st Conference on Mathematics and its Applications, 2010 年 10 月 15 日, 東国大学校, 慶州 (韓国)
- 33) S. Saitoh, Fundamental error estimates inequalities for the Tikhonov regularization using reproducing kernels, Conference on Inequalities and Applications 10, 2010 年 9 月 22 日, In Hotel, ハイドゥーンボスロー (ハンガリー)
- 34) Yasushi Hataya, Decay estimates of Navier-Stokes flow with free boundary, Regularity aspects of PDE - a week for Wojciech Zajczkowski, Banach Center, ポズナン (ポーランド)
- 35) Makoto Masumoto, Once-holed tori embedded in Riemann surfaces, Methods of Modern Mathematical Analysis and Applications, 2010 年 8 月 31 日, Hanoi University of Science, ハノイ (ベトナム)
- 〔図書〕(計 1 件)
- 1) 柴 雅和, 複素関数論, 朝倉書店, 2013 年, 228 ページ
- 〔産業財産権〕
- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)
- 〔その他〕
- ホームページ等
<http://kyouin02.atm-y.jimu.yamaguchi-u.ac.jp/search/IST?ISTActId=FINDJPDdetail&ISTKidoKbn=&ISTErrorChkKbn=&ISTFormSetKbn=&ISTTokenChkKbn=&userId=100000830>
6. 研究組織
- (1) 研究代表者
 増本 誠 (MASUMOTO, Makoto)
 山口大学・大学院理工学研究科・教授
 研究者番号: 50173761
- (2) 研究分担者
 柴 雅和 (SHIBA, Masakazu)
 広島大学・工学研究科・名誉教授
 研究者番号: 70025469
- 山田 陽 (YAMADA, Akira)
 東京学芸大学・教育学部・教授
 研究者番号: 60126331
- 柳原 宏 (YANAGIHARA, Hiroshi)
 山口大学・大学院理工学研究科・准教授
 研究者番号: 30200538

幡谷 泰史 (HATAYA, Yasushi)
山口大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：20294621

(3)連携研究者

木内 功 (KIUCHI, Isao)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：30271076

渡辺 正 (WATANABE, Tadashi)
山口大学・教育学部・教授
研究者番号：10107724
(平成 22 年度のみ)