

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 10 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540197

研究課題名(和文)滑らかな係数と精密な対角化による発展方程式解析の新たな展開

研究課題名(英文)The refined diagonalization procedure and a development on the evolution equations with smooth coefficients

研究代表者

廣澤 史彦(Hirosawa, Fumihiko)

山口大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：50364732

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、滑らかな係数を待つ発展方程式に対する精密な対角化の手法を用いて、変数係数を持つ波動方程式やクライン・ゴルドン型方程式、一般の2階双曲型方程式、半線形波動方程式に対して、従来の手法では困難であった精密な解の評価を行うことに成功した。これらの証明の中で発展させた手法は、今後、非線形波動方程式の一種であるキルヒホフ方程式の大域可解性の問題など、他にも様々な問題に対して応用が期待される。

研究成果の概要(英文)：In this project, we studied evolution equations with smooth variable coefficients by using a special technique for the precise representations of the solutions, which is called "the refined diagonalization procedure". This method is very useful for the analysis of the initial values problems of hyperbolic equations with variable coefficients, for example, wave equations, Klein-Gordon type equations, second order hyperbolic equations and semi-linear wave equations. Indeed, we succeeded to prove some estimates for these problems, which couldn't be solved by using the previous method, by using our new method. Moreover, we expect that our results will be applicable for the analysis of non-linear problems, in particular, for the global solvability of Kirchhoff equation in non-realanalytic class.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：双曲型方程式 変数係数 波動方程式 非線形波動方程式

1. 研究開始当初の背景

双曲型の変数係数発展方程式は、純粋な数学的立場からも、他分野への応用という立場からも興味深い研究対象であり、偏微分方程式における主要な研究テーマの一つとして数多くの研究結果があった。だが、当時はそれらのほとんどが、古典的なエネルギー法の限界に縛れた、定数や単調な係数の摂動という立場からの考察であり、係数の振動の影響は誤差として取り扱われていた。しかし、これでは変数係数の振動によって引き起こされる、複雑であるが故に興味深い現象を見出すことは難しかった。また、線形化モデルとして変数係数方程式が考えられるキルヒホフ方程式などの非線形波動方程式に対する研究の限界も、本質的にはその問題に帰着されると考えられた。エネルギー法を、発展作用素の非対角成分の絶対値を対角成分で評価する方法と解釈すると、非対角成分のオーダーをより小さくするような対角化こそ、解の精密な評価に本質的であると考えられる。これは誰もが考える極めて自然な発想だが、それを実現し、更にそこから意味のある結果を引き出すためには、「対角化における係数の滑らかさの寄与」と「相空間上の限定された領域における対角化」に着目することが必要であった。更に「高周波領域のみで有効な新しい対角化のアルゴリズム」に注目することにより、係数の滑らかさと対角化から、かつてない精密な解の評価を導き出せる可能性があった。このようなアイデアの背景には、今回考察した発展方程式で与えられる最も単純な方程式の例である、「時間変数係数を持つ波動方程式の初期値問題における、Hölder 連続な係数に対する Gevrey 適切性」に関する古典的な結果と、本研究代表者による「 C^m クラスの係数に対するエネルギー評価」の結果があった。これらの研究を背景に、既存の手法を洗練・精密化するための新しい手法として、「相空間の無限個の分割と各領域での最適対角化の手法」を導入することにより、従来手法では不可能だった様々な問題が解決され、また新たな問題が生み出されてゆくことが期待された。

2. 研究の目的

上記の研究背景をふまえ、本研究では、全く新しい立場から C^m 、 C クラスの係数を持つ双曲型を中心とする発展方程式の漸近挙動を解析し、従来結果の精密化と、それによって明らかになる係数の振動によって引き起こされる新たな現象の解明を目的とし、次のような問題を設定した。

(1) 変数係数 Klein-Gordon 型方程式の初期値問題に対するエネルギー評価：Klein-Gordon 型方程式の質量項は、低周波領域の評価において本質的な影響を持つ。一方、高周波領域における係数の滑らかさを考慮した評価においても、低周波領域の評価は係数の滑らかさと密接に関係している。質量項

の無い波動方程式の結果を、Klein-Gordon 型方程式の場合に拡張し、係数の時間に依存する滑らかさと、低周波領域での影響を考慮した減衰オーダーとの関係を解析する。

(2) 振動する係数を持つ 2 階弱双曲型方程式の Levi 条件の定式化の問題：振動する C^2 クラスの係数を持つ弱双曲型方程式の Levi 条件(適切性を保証する係数同士の関係)が、単調な係数の場合とは全く異なる形で与えられることを示した研究代表者らによる過去の結果を、一般の C^m 、 C クラスの係数の場合に拡張する。

(3) 非線形波動方程式の大域可解性に関する問題： C^m 、 C クラスの係数を持つ線形波動方程式の解の精密な評価に関する研究代表者の過去の研究を応用し、変数係数の半線形波動方程式の大域可解性を、既知の結果を本質的に拡張した条件の下で証明する。

3. 研究の方法

この研究の技術的なポイントは、係数の滑らかさの寄与を取り出すための新たな対角化の技法を導入することにより、主に双曲型発展方程式に関する従来結果の精密化と新たな展開を見出すことであった。実際、研究対象となる問題は多岐に及ぶため、問題の種類に応じて、背景となった研究に関してより深い知識を持つ他の研究者との共同研究を効果的に取り入れながら、次のように研究を遂行した。(以下の番号は、それぞれ研究目的で記述した研究課題の番号に対応している。)

(1) 変数係数 Klein-Gordon 型方程式の初期値問題に対するエネルギー評価の問題に関しては、当時興味深い成果を出していた外国人研究者 Böhme 氏(論文の共著者)とともに行った。Böhme 氏の過去の研究は、特に単調な係数に対する特殊関数の性質等を用いた非常に精密な評価だったが、その手法を非単調な係数の問題に応用するのは難しいと思われた。そこで、係数の振動の影響が顕著となる高周波領域におけるエネルギー評価において、研究代表者のアイデアを導入することによって、非単調な係数を持つ Klein-Gordon 型方程式の精密なエネルギー評価を行うことが可能となった。

(2) 一般の 2 階双曲型方程式のエネルギー評価に関しては、研究代表者らの過去の研究結果から、特に係数が振動する場合、それらの相互作用によるある種の共鳴や干渉の効果によって、単調な係数の場合には起こり得ない複雑な現象が起こる可能性があることが知られていた。だが、当時は係数の C^2 の滑らかさの特性のみを考慮した対角化の手法しか確立されておらず、かなり限定された結果であった。しかし、その後発展した係数の更なる滑らかさを考慮した対角化の手法を導入することによって、より精密かつ本質的な議論を行うことが可能となった。この研究は、変数消散型波動方程式のエネルギー評価

の研究で当時興味深い結果を発表していた外国人研究者 Bui 氏 (論文 の共著者) とともに、互いの得意分野を補いながら共同研究を展開した。

(3) 本研究で考察した、伝播速度が時間に依存する半線形波動方程式は、ある種の変数変換によって線形の変数係数波動方程式に帰着される。このとき、元の半線形方程式の小さい初期値に対する大域可解性は、線形方程式のエネルギー評価の問題に置き換えることが可能となる。その際、定数係数の方程式では起こりえない、「係数の振動によるエネルギーの流入出」や「増大する拡散係数によるエネルギーの安定化」、更に「係数の滑らかさの寄与」や、既知の比較的荒い評価では問題にならなかった「係数の漸近挙動に対するある種の安定性条件」などを議論する必要があった。既存の手法では不十分であったその実現のため、本研究では係数の滑らかさを考慮した対角化の手法を導入した。この研究は、外国人研究者 Pham 氏、および大学院生の Inooka 氏 (論文 の共著者) と共同研究により遂行された。

4. 研究成果

(1) 非単調な変数係数の質量項を持つ Klein-Gordon 型方程式の初期値境界値問題において、係数に C^m 、 C クラス、更に Gevrey クラスの滑らかさと、振動の効果を加えた摂動問題に対して、係数の滑らかさに応じた精密なエネルギー評価を得ることができた。

(2) 時間に依存する滑らかな係数を持つ 2 階双曲型方程式の初期値問題に対して、「高階の Levi 条件」という、係数の相互作用を規定する解のエネルギーの安定性のための新たな性質を導入することによって、従来の研究の範疇では評価ができなかった解のエネルギー評価を証明した。

(3) 伝播速度が時間変数に関して C^m クラス、Gevrey クラスの滑らかさで振動する半線形波動方程式において、従来の手法では取り扱うことができなかった激しく振動する係数のモデルに対して、時間大域解の存在性を証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

F. Hirosawa, T. Inooka and T. D. Pham, On the global solvability for semilinear wave equations with smooth time dependent propagation speeds. Asymptotic Profiles, Regularity and Well-Posedness, 153-181, Springer Proc. Math., 44, Springer, Heidelberg, 2013. ISBN: 978-3-319-00124-1 (査読有)

C. Böhme and F. Hirosawa, Generalized

energy conservation for Klein-Gordon type equations. Osaka J. Math., 49 (2012), 297-323. (査読有)

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/ojm/contents.html>

T. B. N. Bui and F. Hirosawa, On energy estimates for second order hyperbolic equations with Levi conditions for higher order regularity. Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. 57 (2011), 317-339. (査読有)

DOI: 10.1007/s11565-011-0121-9

[学会発表](計23件)

廣澤史彦, On second order weakly hyperbolic equations and the ultradifferentiable classes, 日本数学会 2014 年度年会, 学習院大学(東京都) (2014 年 3 月 15 日).

F. Hirosawa, On second order weakly hyperbolic equations and the ultradifferentiable classes, 9th ISAAC Congress (Qualitative Properties of Evolution Models) at Pedagogical University of Cracow, Cracow, Poland (2013 年 8 月 9 日).

F. Hirosawa, On the global solvability for semilinear wave equations with smooth propagation speeds, The 4th Nagoya Workshop on Differential Equations, 名古屋大学(名古屋市) (2012 年 3 月 6 日).

F. Hirosawa, On the energy estimates for second order homogeneous hyperbolic equations with Levi-type conditions, Microlocal Day #2 at Imperial College London, London, UK (2010 年 12 月 3 日)

F. Hirosawa, On the energy estimates of second order hyperbolic equations with time dependent coefficients, Workshop on Fourier Analysis and Partial Differential Equations at University of Göttingen, Göttingen, Germany (2010 年 6 月 15 日).

[図書](計0件)

[産業財産権]
出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://ds0n.cc.yamaguchi-u.ac.jp/~hirosawa/index.htm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

廣澤 史彦 (HIROSAWA, Fumihiko)
山口大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：50364732

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：