

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 4月 12日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540204

研究課題名（和文） 磁場中の波動伝播現象の解析と散乱逆問題

研究課題名（英文） Analysis of wave propagation phenomena in the magnetic fields and inverse scattering problems

研究代表者

望月 清 (MOCHIZUKI KIYOSHI)

首都大学東京・理工学研究科・名誉教授

研究者番号： 80026773

研究成果の概要（和文）：本研究は波動方程式，クライン・ゴルドン方程式，シュレディンガー方程式及びその周辺に現れる様々な数理モデルの波動現象を研究対象にし，中心課題を磁場中の波動伝播の漸近解析に置いた．また，散乱理論や逆問題など，応用への貢献が期待される結果も得られている．結果を具体的に説明するために論文 (1)，(2)，(3) のアブストラクトを加える．

- (1) この論文では Schro" dinger 方程式，Klein-Gordon 方程式，波動方程式に対して一般的な散乱理論の枠組みの中のいくつかの基本的問題を概説する．摂動法に対する適当な減衰/or 小ささの条件のもとで次の topics が考察される：一般固有関数の増大度の評価，レゾルベント評価，散乱順問題と散乱逆問題，平滑化効果と Strichartz 評価．道具である 重み付きエネルギー法の性質をうまく引き出すことにより，いくつかの問題では自然に時間依存型の摂動や非自己共役の摂動に適用範囲を広げることが可能である．
- (2) ここでは一つの無限 ray と一つの loop が一点で交わっているグラフ上の散乱逆問題を論じる．我々の問題は作用素の散乱データを基にポテンシャルを再構成しようというものである．
- (3) この論文では磁場中の Schro" dinger 作用素が強い特異性をもつ外部ポテンシャルを伴う場合に現れるいくつかの基本的な問題を議論する．扱われる問題は 作用素の自己共役性，i 一般固有関数の増大度の評価，極限吸収の原理，レゾルベントの全エネルギーレベルでの一様評価，と対応する発展方程式に関する平滑化効果である．

研究成果の概要（英文）： In this project we are interested in various wave propagation phenomena of Acoustic, Klein-Gordon, Schro" dinger equations. Main part of the study is the asymptotics of the waves propagation phenomena in the magnetic fields. We further study scattering direct and inverse problems which are important in applied physics. In order to explain the results more specifically, we list here the abstracts of the papers (1), (2) and (3).

- (1) We survey some basic problems of Schro" dinger, Klein-Gordon and wave equations in the frame fork of general scattering theory. The following topics are treated under suitable decay and/or smallness conditions on the perturbation terms. Growth estimates of generalized eigenfunctions, Resolvent estimates, Scattering direct and inverse problems, Smoothing properties and Strichartz estimates. Due to our formulation of the weighted energy method, some topics are naturally extended to time-dependent and/or non-selfadjoint perturbations.
- (2) We treat an inverse scattering problem on a graph with an infinite ray and a loop joined at one point. Our problem amounts to the reconstruction of potential on the basis of scattering data of operator.
- (3) In this article we survey some basic results for the magnetic Schro" dinger operator with external potential which has a strong singularity. The following topics are treated under suitable decay conditions on the magnetic field and external potential:

Selfadjointness of the operator, Growth estimates of generalized eigenfunctions, Principle of limiting absorption, Uniform resolvent estimates, and Smoothing properties for corresponding evolution equations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、数学解析

キーワード：磁場中の波動伝播、Schrödinger 作用素、平滑化効果、散乱理論、グラフ上の散乱逆問題

1. 研究開始当初の背景

本研究の対象は物理学の基礎方程式であり、長い歴史と豊富な結果が蓄積されている。しかし、磁場を伴う方程式に対しては、その重要性にもかかわらず、満足できる結果が得られていない。グラフ上の散乱逆問題に関してはその重要性にもかかわらず、日本での研究は盛んではない。

2. 研究の目的

磁場を伴う Schrödinger 作用素に対し、既存の結果はベクトルポテンシャル自体に減衰条件を課しているが、条件は実態である磁場（ポテンシャルの rotation）に本来課せられるべきである。本研究はこの問題に取り組み、レゾルベントの一樣評価を得、それをもとに関連する種々の発展方程式の平滑化効果の研究に応用する。更に結果を散乱問題の研究に発展させる。散乱逆問題については消散項、ポテンシャル付きの波動方程式の固定エネルギー散乱振幅からの係数再構成の問題、グラフ上のポテンシャル再構成の問題に取り組む。

3. 研究の方法

主催する三大学偏微分方程式セミナー{中大セミナーの改組}を中心に討論を続け、国内外の研究者達と研究交流を深め、資料や情報を積極的に入手する。

4. 研究成果

本研究は波動方程式、Klein-Gordon 方程式、Schrödinger 方程式等物理学の基礎方程式、その周辺に現れる様々な波動伝播現象の数理モデルを研究対象にし、中心課題を磁場中の波動伝播の漸近解析に置いた。

論文 (3), (4), (6) では磁場の影響、また強い特異性を伴う外部ポテンシャルの影響のもとでレゾルベントの一樣評価、特に低エネルギー近辺の評価どのように求めるかという問題に一定の成果が得られた。また、その結果を3つの具体的な発展方程式の平滑化効果をもとめるのに応用し、いくつかの新しい知見を得た。具体的に述べよう。

1. 磁場中の Schrödinger 作用素を全空間および外部領域で扱い、磁場および外部ポテンシャルの小ささと遠方での強い減衰条件のもとでレゾルベントのすべてのエネルギーレベルでの一樣評価をえている。磁場に課す条件は、他の多くの研究でベクトルポテンシャルに課しているが、ここでは実態である磁場そのものの条件になっていることを強調したい。証明方法は重み付き定常エネルギー法である。評価のための最良の重みを見つければ、そのなかで放射条件を定める関数に関係した新しい Hardy 型の不等式を導いている。
2. 全空間での問題に対しては外部ポテンシャルの原点での特異性が問題になる。ここでは2次の特異性まで許し、Friedrichs 拡張を得ている。そのために磁場を伴う Hardy 型の不等式が必要で、ここでそれを導いている。
3. 一般固有関数の増大度の評価は極限吸収の原理を導くのに用いられるが、ここでは F. Rellich が外部領域の Laplacian に対して導いたものと同じ、最も精密な評価を得ている。この結果が1の重みの発見につながっている。
4. Schrödinger 発展方程式については1のレゾルベントの一樣評価から非斉次方

程式の解に対する平滑化効果が求められる。しかし対応する Klein-Gordon や波動方程式については残念ながら政治方程式に対する平滑化効果しか得られておらず、課題がのこされている、

論文 (1) ではポテンシャルや媒質の不均質性が時空の変数に依る問題をも対象に平滑化効果を拡張し、さらに Strichartz 評価をより広い問題に適用する道筋を示した。これにより分散型の非線形発展方程式の研究の進展が期待される。更に消散項とポテンシャルを含む波動方程式について固定エネルギーレベルの散乱振幅からこれらを再構成する散乱逆問題を解析した。しかし、これらの結果は更なる発展が望まれ、研究を継続したい。

論文 (2), (5) はコンパクトな部分を含む無限グラフ上の Schro" dinger 作用素の研究で、ここではコンパクト部分が loop 状になった問題を考えた。固有値の特定、連続スペクトルに対応するスペクトル表現を定め、散乱関数からポテンシャルを同定する逆問題の一意性を証明した。グラフ上の量子力学は回路基板に沿った微粒子の量子論的運動を説明するだけでなく、ナノテクノロジーや量子コンピュータの回路設計などに応用され、その重要性が増している。基本のグラフはいくつかの半直線が 1 点でつながる星型グラフであるが、それにいくつかの有限線分や loop などが加わったグラフが興味深い。現在、この問題の研究をすすめており、いくつかの論文を準備している。研究会でのアブストラクト

1, Spectral and scattering problems on noncompact star graphs including finite rays, 東海大講演アブストラクト 2012

2. Spectral representations and scattering for Schro" dinger operators on star graphs, 同 2011

の結果を loop も交るものに改良することができている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- (1) 望月 清, Resolvent estimates and scattering problems for Schro" dinger, Klein-Gordon and wave equations, Progress in Partial Differential Eqs, Springer, 査読あり, 2013, to appear
- (2) 望月 清, イゴル トルシン, On the scattering on a loop-shaped graph,

Progress in Math, Birgha" user, 査読あり, 301, 2012, 227-245

- (3) 望月 清, Resolvent estimates for magnetic Schro" dinger operators and their applications to related evolution equations, Rent. Inst. Math. Univ. Trieste, 査読あり, 42 Suppl. 2010, 143-164
- (4) 望月 清, Uniform resolvent estimates for magnetic Schro" dinger operators and smoothing effects for related evolution equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読あり, 46, 2010, 741-764
- (5) 望月 清, イゴル トルシン, Loop を伴うグラフ上の Schro" dinger 作用素の散乱逆問題, Seminar Notes Math., 査読無し, 13, 2010, 113-117.
- (6) 望月 清, Magnetic Schro" dinger 作用素に対する resolvent estimates とその応用, 査読無し, 数理研究録, 1696, 2010, 9-31

[学会発表] (計 10 件)

1. (招待講演) 望月 清, Stationary approach to the time dependent scattering theory on star graphs, 2013. 3. 14, 信大関数解析研究会
2. (招待講演) 望月 清, Spectral representations and scattering for Schro" dinger operators on noncompact star-shaped graphs, 2012. 12. 27, Taiwan-Japan joint conference on PDE and analysis, Taipei, Taiwan
3. (招待講演) 望月 清, Spectral representations and scattering for Schro" dinger operators on noncompact star-shaped domain, 2012. 8. 24, 北大 "上見廉太郎追悼" 研究集会
4. (招待講演) 望月 清, 散乱理論における Marchenko 方程式, 2012. 3. 16, 中大談話会
5. (招待講演) 望月 清, Spectral and scattering problems on noncompact star graphs including finite rays, 2012. 3. 9, 東海大発展方程式シンポジウム
6. (招待講演) 望月 清, 星型グラフ上の散乱問題, 2011. 9. 5, 夏の作用素論シンポジウム
7. (総合講演) 望月 清, Resolvent estimates and scattering problems for Schro" dinger, Klein-Gordon and wave equations, 2011. 8. 23, 8th ISAAK international conference, People" s Friendship Univ. Moscow, Russia
8. (招待講演) 望月 清, Spectral

representations and scattering for Schro" dinger operators on star graphs, 2011.3.10, 東海大発展方程式シンポジウム

9. (招待講演) 望月 清, Loop を含むグラフ上の Schro" dinger 作用素, 2010.9.4, 夏の作用素論シンポジウム
10. (招待講演) 望月 清, Smoothing properties for magnetic Schro" dinger operators with singular potentials, 2010.5.27, 8th IMAS International Conference, Dresden Univ, Technology, Germany

[その他]

[大学等のセミナー発表] (計 5 件)

1. Spectral representations and scattering for Schro" dinger operators on star graphs, 2011.10.12, 筑波大学解析セミナー
2. レゾルベントの低エネルギー評価と消散型方程式方程式の解の挙動, 2011.8.3, 三大学偏微分方程式セミナー
3. スターグラフ上の Schro" dinger 作用素のスペクトル表現と散乱問題, 東京大学応用解析セミナー
4. Magnetic Schro" dinger 作用素に対する Resolvent の一様評価と関連する発展方程式の平滑化効果, 2011.6.30, 名古屋大学解析セミナー
5. Resolvent estimates and smoothing effects, 2010.11.18, 首都大学東京数理解析セミナー

[研究会の主催] (計 5 件)

1. 松本での作用素論研究会, 2013.3.2-4, 東横イン松本 4 講演, 参加者 15 名
2. 函館偏微分方程式研究会, 2012.10.6-8, 公立函館未来大学 16 講演, 参加者 35 名
3. 仙台偏微分方程式研究会, 2011.10.8-10, 東北大学情報科学研究科 15 講演, 参加者 43 名
4. 信州松本偏微分方程式研究会, 2010.12.4-5, 共済組合みやま荘 6 講演, 参加者 20 名
5. 新潟偏微分方程式研究会, 2010.10.9-11, 新潟大学駅中サテライト 15 講演, 参加者 37 名

[三大学セミナーの主催]

中央大学偏微分方程式セミナーを改編し, 中央大学, 日本大学, 国士舘大学のそれぞれ理工学部で回り持ちのセミナーを開催し, 内外の研究者, 三大学の研究者と私の元学生などの研究発表を行っている.

私の研究主体をここに置くと共に, 若手研究者の育成にも役立っている. 月 1 回のペースで 2012 年度は 12 回, 発表者 16 名, 2011 年度は 13 回, 発表者 17 名, 2010 年度は 9 回, 発表者 12 名であった.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

望月 清 (MOCHIZUKI KIYOSHI)

首都大学東京・理工学研究科・名誉教授

研究者番号: 80026773

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし