様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　５ 月 １５ 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４０２０７

研究課題名（和文）変分問題と関連した非線形偏微分方程式の解の正則性に関する研究

研究課題名（英文）Research on the regularity of solutions for nonlinear partial differential equations related to variational problems

研究代表者
立川　篤（Tachikawa, Atsushi）

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：５０１８８２５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,000,000円、（間接経費）　900,000円

研究成果の概要（和文）：ある種の「量」の極値となる写像・関数を求める問題を変分問題と呼んでいる。変分問題を扱う際には、まず、拡張された意味で微分可能な写像の集合の中での「解」の存在を示し、適当なレベルまでその「解」が「滑らか」であることを示すという二段階の手順を踏むことが多い。この後半の問題は「解の正則性の問題」と呼ばれており、本研究課題で扱ったのはこの「正則性の問題」である。一般に、この問題は、現れる係数の滑らかさについて、連続性もしくは更に強く微分可能性等の条件を課して扱われるが多かったが、この係数の滑らかさに関する条件を弱めてなお「正則性」を得ることを目指し、幾つかの新たな結果を得た。

研究成果の概要（英文）：The problems to find maps or functions that give critical points of a quantity under consideration are called variational problems. When we treat variational problems, we often employ the following 2-step procedure: first, we find a "solution" in the class of maps that are differentiable in certain generalized sense, and, as the second step, we prove that the "solution" is appropriately smooth. This second step is called "regularity problem", and in this research we treat "regularity problem". In general, when we consider "regularity problem", we often assume continuity or, more strongly, differentiability of coefficients. In this research, we tried to obtain some regularity results under weaker conditions on the smoothness of coefficients, and we have gotten some new results.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式　変分問題　弱解の正則性　Finsler多様体　p(x)-growth functional

1　研究開始当初の背景

開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ と写像 $u:\Omega \to \mathbb{R}^n$ に対して汎関数 $\mathcal{A}(u;\Omega)$ を

$$\mathcal{A}(u;\Omega) := \int_\Omega A(x,u,Du)dx \qquad (1.1)$$

により定義する．ただし，$Du = (D_\alpha u^i) = (\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha})$ であり，$A(x,u,\xi):\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{mn}\to\mathbb{R}$ は適当な条件を満たす関数とする．この汎関数の極値を与える写像はオイラー・ラグランジュ方程式と呼ばれる次の方程式の解となる．

$$D_\alpha\big(A_{\xi^i_\alpha}(x,u,Du)\big) - A_{u^i}(x,u(x),Du(x)) = 0. \qquad (1.2)$$

(ただし，$A_{\xi^i_\alpha} = \frac{\partial A}{\partial \xi^i_\alpha}$，$A_{u^i} = \frac{\partial A}{\partial u^i}$) 汎関数 $\mathcal{A}(u;\Omega)$ に対する変分問題においては，適当なソボレフ空間において $\mathcal{A}$ の極値を与える写像，もしくは (E-L) の弱解を求め，さらにその弱解が,「問題の要求するレベルまで微分可能」であることを示すという手法がとられることが多い．この後半のステップは「解(弱解）の正則性の問題」と呼ばれている．

上記のオイラー・ラグランジュ方程式 (E-L) の弱解の正則性を研究する際，従来は A の滑らかさについて

(a) 各 $(u,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{mn}$ に対して，$A(\cdot,u,\xi)$ は連続である．

(b) 各 $(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}^n$ に対して，$A(x,u,\cdot)$ C^2-級である．

という仮定がおかれてきた．しかし，いくつかの重要な問題においてはこれらの仮定は満たされていない．例えば，リーマン多様体間の調和写像の一般化として，フィンスラー多様体 (N,F) への調和写像の正則性を扱う際，条件 (b) を $C^{1,1}$ 級に緩和することが必要となる．実際，フィンスラー計量 $F(u,X)$ $(u\in N,\ X\in T_uN)$ が $X=0$ で特異性を持たなければ，それは X に依存せず，結局リーマン計量となってしまう．即ち，フィンスラー多様体への写像のエネルギーは必然的に $Du=0$ となるところで特異性を持つのである．フィンスラー多様体への調和写像の正則性に関して結果は，立川による [6, 7] のみであった．

条件 (a) を緩和する方向では，係数の属すクラスが VMO(Vanishing Mean Oscillation) と呼ばれる必ずしも連続でない関数を含むクラスである場合を考えた．ここで，φ が $VMO(\Omega)$ に属すとは

$$\lim_{r\to 0}\sup_x \frac{1}{|B_r(x)\cap\Omega|}\int_{B_r(x)\cap\Omega}|\varphi(y)-\varphi_r|dy = 0$$

を満たすことを言う．ただし，φ_r は φ の $B_r(x)\cap\Omega$ 上での積分平均を表す．VMO-係数の偏微分方程式はイタリアの Catania 大学の研究グループにより研究されていたが，いずれも線型方程式を扱ったものであった．一方，本研究で扱った問題では，関連する方程式 (1.2) は一般に非線形である．このような非線形問題，特に変分問題の解に関しては，2005 年以降，M.A. Ragusa 氏と立川の共同研究 [1, 2, 3] により，標準的増大度 (standard growth) もしくは p-増大度と呼ばれる場合，すなわち

$$\lambda|\xi|^p \le A(x,u,\xi) \le \Lambda(1+|\xi|^2)^{p/2}$$

を満たす場合で，特に $p\ge 2$ であるものに対して，(1.1) で定義される汎関数 $\mathcal{A}$ の最小点となる写像の部分正則性（次元が定義域の次元 m より低い集合を除いた開集合上での正則性）に関する結果が得られていた．一方，ξ に関する増大度がより一般の場合である非標準的増大度 (nonstandard growth) と呼ばれる場合，すなわち

$$\lambda|\xi|^p \le A(x,u,\xi) \le \Lambda(1+|\xi|^2)^{q/2} \quad (p<q)$$

というタイプの汎関数に対する研究が 1980 年代末から P.Marcellini らによって始められて以来盛んになってきたが，このようなタイプの汎関数に対しては，係数に十分な滑らかさを仮定しても標準的増大度の場合に比べてかなり弱い結果しか得られていなかった．

参考文献

[1] M. A. Ragusa and A. Tachikawa. On continuity of minimizers for certain quadratic growth functionals. *J. Math. Soc. Japan*, 57(3):691–700, 2005.

[2] M. A. Ragusa and A. Tachikawa. Partial regularity of the minimizers of quadratic function-

als with VMO coefficients. *J. London Math. Soc. (2)*, 72(3):609–620, 2005.

[3] M. A. Ragusa and A. Tachikawa. Regularity of minimizers of some variational integrals with discontinuity. *Z. Anal. Anwend.*, 27(4):469–482, 2008.

[4] M. A. Ragusa and A. Tachikawa. On interior regularity of minimizers of $p(x)$-energy functionals. *Nonlinear Anal.*, 93:162–167, 2013.

[5] M. A. Ragusa, A. Tachikawa, and H. Takabayashi. Partial regularity of $p(x)$-harmonic maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365(6):3329–3353, 2013.

[6] A. Tachikawa. A partial regularity result for harmonic maps into a Finsler manifold. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 16(2):217–224, 2003. " *Erratum.* Carc. Val. Partial Differ. Equ., 15 (2003) 225–226.".

[7] A. Tachikawa. Partial regularity results up to the boundary for harmonic maps into a Finsler manifold. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(5):1953–1970, 2009.

[8] A. Tachikawa. Existence and regularity of weakly harmonic maps into a finsler manifold with a special structure. *Bull. London Math. Soc.*, 44(5):1020–1033, 2012.

[9] A. Tachikawa. $c^{1,\alpha}$-regularity of energy minimizing maps from a 2-dimentional domain into a finsler space. *Houston J. Math.*, 39(4):1175–1186, 2013.

2 研究の目的

申請時当初の研究目的は主に次に挙げるものであった．なお，以下において，「条件 (a), (b)」は前項に挙げたものを指す．

(1) 条件 (a) を，「連続」という条件から「VMO」という条件に緩和した場合を研究し，前項の参考文献表の [1, 2, 3] で得られていた結果をさらに発展させ， 非標準的増大度の場合に対しても正則性に対する結果を得る．

(2) 条件 (b) を $C^{1,1}$-級に緩めた場合を扱い，正則性に関する結果を得る．特に，フィンスラー多様体への調和写像を念頭に研究を進め，その正則性について，リーマン多様体間の調和写像に対する結果に対応するものがどの程度まで成り立つか調べる．

なお，当初は条件 (a), (b) ともに緩めた場合も扱うことも考えたが，それぞれの場合に対して得られた結果を組み合わせることにより，比較的容易に結果が得られであろうことが予想できるに至り，研究期間内ではそれぞれの場合を単独に研究することに集中した．

3 研究の方法

オイラー・ラグランジュ方程式 (1.2) の弱解，特にそれが汎関数の最小点となっている場合に対して，その正則性を得るために，「直接的方法」と呼ばれる方法を主に用いた．この方法は，問題にしている汎関数 $\mathcal{A}$ の最小点 u の正則性を得るために，$\mathcal{A}$ を十分近似しているが構造が簡単でその最小点の正則性がよく分かっている汎関数 $\mathcal{A}_0$ をうまく選び，$\mathcal{A}_0$ の最小点 v と $\mathcal{A}$ の最小点 u との差を評価することにより u の正則性を得るというものである．また，正則性を得るための理論としては Morrey 空間，Campanato 空間の理論を用いた．

「研究目的」の項で述べた (1) の問題については，特に $p(x)$-エネルギーと呼ばれる汎関数の最小点となる写像に対して，部分正則性を得ることを目指し，さらに one-sided condition（定理 4.3 参照）と呼ばれる条件下で定義域内部全体での正則性を得ることも目指した．

この問題は予てより Catania 大・M.A.Ragusa 准教授と共同で研究を行っており，本研究課題に対する補助金により，何度か Catania 大を訪れ研究連絡を行うことができ，研究の進捗に大いに役立った．

(2) の問題ついては，フィンスラー多様体への調和写像（特に energy を最小化する場合）に対して，2009 年の立川による部分正則性に関する結果を発展させ，やはり one-sided condtion の下で，定義域全体での正則性を得ることを目指した．また，リー

マン多様体間の調和写像に対する結果からの類推から，定義域が２次元の場合は定義域全体での正則性が得られるであろうとも予想できたので，この方向でも研究を進めた．

4　研究成果

本研究課題の研究成果は，「研究目的」の項で述べた目的の **(1)**, **(2)** に対応して，２つに大別されるため，それぞれについて述べる．なお，本項の引用文献番号は次項「5. 主な発表論文等」の「雑誌論文」欄の番号に対応している．

(1) VMO-係数をもつ汎関数を最小化する写像の正則性

Ω を $\mathbb{R}^m$ の有界開集合で十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つとし，係数行列 $g^{\alpha\beta}(x)$, $h_{ij}(u)$ は次の条件を満たすとする．

(C1)　$g^{\alpha\beta}(x)$, $h_{ij}(u)$ はそれぞれ Ω，$\mathbb{R}^n$ 上で定義され，一様強楕円性の条件を満たすとする．

(C2)　$g^{\alpha\beta} \in VMO(\Omega)$.

(C3)　$h_{ij}(u)$ は一様連続である．

これらを用いて，$u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ のエネルギー密度 $e(u)$ を次で定義する．

$$e(u)(x) := g^{\alpha\beta}(x)h_{ij}(u)D_\alpha u^i(x)D_\beta u^j(x).$$

さらに，$p : \Omega \to [1, \infty)$ に対して，u の $D \subset \Omega$ 上での $p(x)$-エネルギー $\mathcal{E}(u; D)$ を

$$\mathcal{E}(u; D) := \int_D e(u)^{p(x)/2} dx$$

により定義する．この $p(x)$-エネルギーを最小化する写像の正則性に関して，ます，次の定理を得た．

定理 4.1 ([3])**.** $g^{\alpha\beta}(x)$, $h_{ij}(u)$ は *(C1)–(C3)* を満たし，$p(x)$ はヘルダー連続かつ

$$\gamma_1 := \inf_\Omega p(x) \geq 2$$

を満たすとする．このとき，$p(x)$-エネルギー $\mathcal{E}$ を最小化する $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ に対し，ある開集合 $\Omega_0 \subset \Omega$ と定数 $\alpha \in (0, 1)$ が存在し，$u \in C^{0,\alpha}(\Omega_0)$ かつ $\mathcal{H}^{m-\gamma_1}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ となる．ここで，$\mathcal{H}^q$ は q-次元ハウスドルフ測度を表す．さらに，$g^{\alpha\beta}$ がヘルダー連続なら，$u \in C^{1,\alpha}(\Omega_0)$ となる．

この結果は，係数 $g^{\alpha\beta}(x)$ に連続性を仮定した場合であっても，これまでの standard growth の p-エネルギーに対する結果を $p(x)$-エネルギーに対して拡張したものとなっており，その点からも重要である．この論文が契機となり，$p(x)$-エネルギーの最小点となる写像に関して，これまで p-エネルギーの場合に対して成立していた結果を拡張し，次に挙げる２つの結果を得た．

定理 4.2 ([1])**.** 定理 *4.1* の条件を全て仮定し，さらに $g^{\alpha\beta}$ がヘルダー連続であると仮定する．u は $p(x)$-エネルギー $\mathcal{E}$ を最小化する有界な写像とする．このとき，ある開集合 $\Omega_0 \subset \Omega$ と定数 $\alpha \in (0, 1)$ が存在し，$u \in C^{1,\alpha}(\Omega_0)$ かつ $\mathcal{H}^{m-[\gamma_1]-1}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ となる．ただし，ここで $[\ ]$ はガウス記号とする．

定理 4.3 ([4])**.** 定理 *4.2* と同様の仮定をおき，特に，$\|u\|_\infty < M$ とする．さらに，h_{ij} が *one-sided condition* と呼ばれる次の条件を満たすとする*:*

> ある $\lambda^* < \lambda_h$ に対して
>
> $$-\frac{1}{2}u^k h_{ij,k}(u)\eta^i\eta^j \leq \lambda_h^*|\eta|^2$$
>
> を全ての $(u, \eta) \in B_M(0) \times \mathbb{R}^n$ に対して満たす．ただし，ここで $B_M(0) := \{v \in \mathbb{R}^n : |v| < M\}$ としている．

このとき，$u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ である．

定理 4.2，定理 4.3 においては $g^{\alpha\beta}$ の連続性が必要であり，「VMO-係数の場合を考える」という当初の問題意識からはずれてしまったが，$p(x)$-エネルギーを最小化する写像の正則性に関する新たな結果を得ることができた．これらは p-エネルギーに関する既知の結果から予想される範囲で最良の結果となっている．

また，これらの２つの定理と定理 4.1 を比較することにより，係数の連続性を VMO に緩めた場合に，「どこまでのことが言えて，何が言えないのか」が分かってきたことも大きな収穫であった．

(2) フィンスラー多様体への調和写像

N を n-次元可微分多様体とする．$F : N \to$

$[0,\infty)$ が次の条件を満たすとき，N 上のフィンスラー構造とよばれる．

(i) 正則性: $F \in C^\infty(TN \setminus 0)$.

(ii) 同次性: $F(u,\lambda X) = \lambda F(u,X) \ \ \forall \lambda \geq 0$.

(iii) 凸性: F^2 の X に関するヘシアンが 任意の $(u,X) \in TN \setminus 0$ において正定値である．

多様体とフィンスラー構造の組 (N,F) をフィンスラー多様体と呼ぶ．リーマン多様体 (M,g) からフィンスラー多様体 (N,F) への写像に対してエネルギー密度を次のように定義する．まず，$x \in M$ に対して，

$$I_xM := \{\xi \in T_xM; \|\xi\|_g \leq 1\},$$

とおく．ただし，$\| \ \|_g$ はリーマン計量 g から定まるノルムとする．写像 $u : (M,g) \to (N,F)$ の $x \in M$ におけるエネルギー密度 $e_f(u)(x)$ を

$$e_f(u)(x) := \frac{1}{\int_{I_xM} d\xi} \int_{I_xM} F^2\big(u(x), du_x(\xi)\big) d\xi$$

と定義し，さらに $D \subset M$ 上のエネルギー $E(u;D)$ を

$$E_f(u;D) := \int_D e_f(u)(x) d\mu$$

と定義する．ただし，μ は g から導かれる M 上の測度を表す．

この E_f の最小点となる写像の正則性については，立川による先行研究において，$m \geq 4$ の場合に対して部分正則性が得られていた．本研究課題では，適当な条件下で “full regularity”即ち定義域全体での正則性が得ることを目指し，次のような特別な構造を仮定した場合に対し，“full regularity” を得ることができた．([5])

まず，フィンスラー構造 F が次の形で与えられている場合を考える．

$$F(u,X) = \sqrt{h_{ij}(u)X^iX^j + \mathcal{B}(u,X)}. \qquad (4.3)$$

ここで，$h_{ij}(u)$ は N 上のリーマン計量で，以下の条件 **(H-1)**, **(H-2)** を満たすとする．

(H-1) N のある点 p_0 と正数 R_0 に対し，測地球

$$B_h(p_0,R_0) := \{p \in N \ ; \ \mathrm{dist}_h(p_0,p) < R_0\}$$

は p_0 の最小跡（cut locus）と交わらない．(dist_h は h_{ij} から定まる N 上の距離)

(H-2) ある正数 σ_0 に対して

$$h_{ij}(u)X^iX^j + \frac{1}{2}u^k h_{ij,k}(u)X^iX^j \geq \sigma_0|X|^2$$

が全ての $(u,X) \in TB_0$ に対して成り立つ．ただし，$h_{ij,k}(u) = \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k}(u)$ である．

また，$\mathcal{B}(u,X)$ は接束 TB_0 で定義された関数で，次の条件 **(B-1)**–**(B-5)** を満たすとする．

(B-1) $\mathcal{B} \in C^2(TB_0 \setminus 0)$.

(B-2) $\mathcal{B}(u,\lambda X) = \lambda^2 \mathcal{B}(u,X)$ for all $\lambda \geq 0$.

(B-3) $\mathcal{B}$ の X に関するヘシアン $(b_{ij}(u,X)) = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{B}(u,X)}{\partial X^i \partial X^j}\right)$ は，ある $\lambda > 0$ に対して

$$(h_{ij}(u) + b_{ij}(u,X))X^iX^j \geq \lambda|X|^2$$

を全ての $(u,X) \in TB$ で満たす．ただし，$|\cdot|$ は普通の Euclid ノルムである．

(B-4) ある定数 $0 < c_b < 1$ に対して，

$$\left|b_{ij}(u,X)u^iX^j\right| \leq c_b \left|h_{ij}(u)u^iX^j\right|$$

を全ての $(u,X) \in TB_0$ に対して満たす．

(B-5) ある定数 $\sigma_1 > -\sigma_0$ に対して，

$$b_{ij}(u,X)X^iX^j + \frac{1}{2}u^k b_{ij,k}(u,X)X^iX^j \geq \sigma_1|X|^2$$

を全ての $(u,X) \in TB_0$ に対して満たす．

定理 4.4 ([5])**.** (M,g) と (N,h) を滑らかなリーマン多様体とし，それぞれの次元を m, n とする．$\Omega \subset M$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし，$B_0 = B_h(p_0,R_0) \subset N$ を *(H-1)* が成り立つような測地球とする．$\mathcal{B}(u,X)$ を TB_0 上で定義された関数で *(B-1)–(B-4)* を，$p_0 = 0$ を中心とする正規座標系 $(u^1,\ldots,u^n)$ に関して満たすとする．F を *(4.3)* によって定義された N 上のフィンスラー構造とする．さらに，$2 \leq m \leq 4$ とし，h_{ij} と $\mathcal{B}$ は *(H-2)* , *(B-5)* を B_0 上で満たすとする．このとき，$\phi(\partial\Omega) \subset B_0$ である $\phi \in H^{1,2}(\Omega,B_0)$ に対して，$\mathcal{E}_f$ を境界条件 $u|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega}$ のもとで最小化する写像 u は Ω 上でヘルダー連続である．

また，２次元では前定理のような強い仮定がなくても，定義域の内部全体での正則性が得られることを [2] において示した．

定理 4.5 ([2]). (M, g) を 2 次元リーマン多様体とし，$\Omega \subset M$ をなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもった有界領域とする．$(\mathbb{R}^n, F)$ をフィンスラー空間とし，$F(u, X)$ の X に関するヘシアンは一様に有界かつ正定値とする．$\phi \in H^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ を与えられた写像とし，境界条件 $u|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega}$ のもとで $u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ がエネルギー E_f を最小化するとする．このとき, ある $\alpha \in (0, 1)$ と任意の $\beta \in (0, 1)$ に対し，$u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ となる．

5 主な発表論文等（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

［雑誌論文］（6 編）

[1] A. Tachikawa. On the singular set of minimizers of $p(x)-$energies. *Carc. Val. Partial Differ. Equ.*（査読あり）, 50 (1-2):145–169, 2014.
DOI:10.1007/s00526-013-0631-7

[2] A. Tachikawa. $C^{1,\alpha}$-regularity of energy minimizing maps from a 2-dimentional domain into a フィンスラー space. *Houston J. Math.*（査読あり）, 39(4):1175–1186, 2013.

[3] M.A. Ragusa, A. Tachikawa, and H. Takabayashi. Partial regularity of $p(x)$-harmonic maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*（査読あり）, 365(6):3329–3353, 2013. DOI:10.1090/S0002-9947-2012-05780-1

[4] M.A. Ragusa and A. Tachikawa. On interior regularity of minimizers of $p(x)$-energy functionals. *Nonlinear Anal.*（査読あり）, 93:162–167, 2013. DOI:10.1016/j.na.2013.07.023

[5] A. Tachikawa. Existence and regularity of weakly harmonic maps into a Finsler manifold with a special structure. *Bull. Lond. Math. Soc.*（査読あり）, 44(5):1020–1033, 2012. DOI:10.1112/blms/bds030

[6] M.A. Ragusa and A. Tachikawa. Estimates of the derivatives of minimizers of a special class of variational integrals. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*（査読あり）, 31(4):1411–1425, 2011. DOI:10.3934/dcds.2011.31.1411

［学会発表］（6 件）

[1] 立川 篤“p(x)-調和写像の正則性について”. 日本数学会　2014 年度年会　関数方程式分科会特別講演，2014 年 3 月 17 日，学習院大学

[2] 立川 篤“Partial regularity of $p(x)$-harmonic maps”. RIMS 研究集会 “幾何学的偏微分方程式に対する保存則と正則性特異性の研究”，2012 年 6 月 13 日，京都大学数理解析研究所

[3] 立川 篤“$p(x)$-調和写像の正則性について”. 仙台小研究集会 – 西川青季教授定年退職記念 – ，2012 年 3 月 16 日，東北大学理学部数理科学記念館（川井ホール）

[4] 立川 篤“$p(x)$-調和写像の部分正則性について”. 北海道大学偏微分方程式セミナー，2011 年 11 月 7 日，北海道大学理学部 3 号館 202 教室.

[5] 立川 篤“On the regularity of harmonic maps from a 2 dimensional リーマン manifold into a フィンスラー manifold”. さいたま数理解析セミナー（第 8 回），2011 年 7 月 29 日，埼玉大学大宮ソニックシティカレッジ

[6] 立川 篤“フィンスラー多様体への調和写像の部分正則性について”. 神楽坂解析セミナー，2011 年 4 月 23 日，東京理科大学神楽坂校舎

6 研究組織

(1) **研究代表者:**
立川　篤
(東京理科大学・理工学部・教授)
研究者番号：50188257

(2) **研究分担者:** なし

(3) **連携研究者:**
長澤 壯之
(埼玉大学理学研究科・教授)
研究者番号：70202223