

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 11 日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540209

研究課題名(和文)放物型ハーディ空間のポテンシャル解析

研究課題名(英文)Potential Analysis for parabolic Hardy spaces

研究代表者

鈴木 紀明(Suzuki, Noriaki)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：50154563

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：ポテンシャル論の主な対象は楕円型方程式の解であるが、放物型方程式の解析も興味深い対象であり、この方面の研究は放物型ポテンシャル論と呼ばれる。本研究は、この観点から、放物型作用素の可積分な解の作るハーディ空間およびベルグマン空間上の作用素解析を放物型ポテンシャル論の手法で行うものである。特に、カルレソン埋め込みが有界となる正測度の特徴付けに成功し、ベルグマン空間においては、テプリッツ作用素がそれぞれ、有界、コンパクト、シャッテン族、有限階数、になるための条件、さらに、テプリッツ作用素とカルレソン埋め込みの関係などについて整理した。

研究成果の概要(英文)：Potential theory is mainly studied solutions of elliptic operators, however, analysis of parabolic operators is also interesting topics, which is called parabolic potential theory. In this view point, we study Hardy and Bergman spaces with respect to a parabolic operators by using parabolic potential analysis. A characterization for positive measures whose Carleson inclusion are bounded is obtained. On Bergman spaces, we discuss that when Toeplitz operator is bounded, compact, of Schatten class or of finite rank. We also study a relation between Toeplitz operator and Carleson inclusion.

研究分野：ポテンシャル論

キーワード：ポテンシャル解析 放物型作用素 ベルグマン空間 ハーディ空間

1. 研究開始当初の背景

ポテンシャル論では調和関数に代表される楕円型方程式の解を主に扱うが、放物型方程式の解も対象になる。この方面の研究は総称して放物型ポテンシャル論と呼ばれるが、楕円型の場合との類似性、差異性あるいはそれらの相互関係の探求は興味深い課題である。この観点から前研究課題では上半空間上の α -放物型 Bergman 空間($0 < \alpha \leq 1$)を定義してその解析を始めた。この空間は、 $\alpha=1/2$ のとき通常の調和 Bergman 空間になり、 $\alpha=1$ のときは熱方程式の解の作る Bergman 空間である。これらの古典的対象を統一的に解析することにより放物型ポテンシャル論の進化を目指した。この空間の基本的な性質(Huygens の性質, 再生性, 双対性)を整理し, Carleson 埋め込みと Toeplitz 作用素についても, その有界性やコンパクト性の, 平均関数や Berezin 変換を使っての特徴付けが分かり始めた。また, 新たに α -放物型 Hardy 空間を定義してその解析を始めた。

2. 研究の目的

放物型ポテンシャル論の進化・発展を目標に, 具体的な対象である α -放物型 Bergman 空間および α -放物型 Hardy 空間について, 以下の課題の解決を目指す。

- (1) α -放物型 Hardy 空間の基本性質の整理
- (2) Carleson 埋め込みと Toeplitz 作用素の関係の整理
- (3) コンパクト Toeplitz 作用素の Schatten 族分類
- (4) 有限階数 Toeplitz 作用素の特徴付け
- (5) 領域の一般化
- (6) Martin 境界の非極小点の考察

3. 研究の方法

連携研究者3名との連絡を密接にして, 前課題で得られた Bergman 型空間に対する諸結果の整理をするとともに, その対比として, Hardy 型空間の解析を進めた。また, 研究代表者が主催する名城大学ポテンシャル論セミナーを活用して, 関連する研究情報の取得や成果発表を頻繁に行った。関連して, 楕円型方程式の Martin 境界の決定について, 対応する放物型方程式の解析を利用した。また, 名城大学内の研究協力者と対数ポテンシャル論の基礎理論を学び, その応用として, 実軸上の指数重みに関する多項式近似の考察を行った。

4. 研究成果

本研究の成果は3つに分類できる。

- (1) $n+1$ 次の上半空間上で定義された正測度 μ が (p,q) -Carleson 不等式を満たすとは, q 次の α -放物型 Bergman 空間が μ に関する p 次の Lebesgue 空間に有界に埋め込まれ

ることである。以前の論文(Hokkaido Math. J. 38 (2008), 177-192)で $q \geq p$ の場合は (p,q) 不等式が成り立つ必要かつ十分条件 μ の λ 次の平均関数が有界になることを示している。ここで $\lambda = (n/2\alpha + 1)(q/p - 1)$ である。雑誌論文⑩では逆の $q \leq p$ の場合を考察し, (p,q) -Carleson 不等式の成り立つ必要かつ十分条件は0次の平均関数が σ 乗可積分であることを示した。ここで σ は p/q の指数共役である。

正測度 μ の定めるコンパクト Toeplitz 作用素が σ -Schatten 族に属する条件について, σ が1以上の場合は平均関数が不変測度に関して σ 乗可積分になることがわかっている(Kodai Math. J. 32 (2009), 501-520)。雑誌論文⑦では, σ が1以下の場合も同じ主張が成り立つことを示した。証明では前者とは異なって atomic 分解定理が重要な役割を演じた。

雑誌論文④では正值2次形式を用いて正測度の定める Toeplitz 作用素を捉え直して, それが有限階数になる必要十分条件は測度 μ の台が有限集合であることを示した。測度 μ はコンパクトな台を持つことを仮定しないで議論を始めている点は特筆すべきである。

雑誌論文①では α -放物型 Hardy 空間の基礎事項を整理するとともに, 正測度 μ のこの空間からの Carleson 埋め込みの有界性を考察した。結果として, μ が α -放物型 Hardy に関する (p,q) -Carleson 測度なる必要かつ十分条件は μ が α -放物型 Bergman 空間に関して (p',q') -Carleson 測度になることである。ここで, $p'q' = pq'(n+2\alpha)$ である。Hardy 型空間における Toeplitz 作用素の解析については今後課題が残った。

- (2) 一般に楕円型偏微分作用の正值解は Martin 核を使って, Martin 境界上の積分で表示される。従って, 正值解の構造とは Martin 核と Martin 境界を求めることに他ならない。

積領域 $D \times \Omega$ 上での歪対称楕円型偏微分方程式について, M.Murata (J. Func. Anal. 194, 53-141 (2002)) は, Ω 上の Green 関数についての半最小性(semismallness) および Ω の Martin 境界に対する極小性(minimality)の条件の元で, $D \times \Omega$ 上の正值解の構造を D および Ω 上の正值解の構造を使って決定している。今回の研究(雑誌論文②)ではこれらの条件を取り除くとともに, より広い対象について, 付随する放物型方程式の Martin 核を使って直接的な方法で該当する Martin 境界および Martin 核の具体的な表示を得た。特に, 非極小点がある場合の対応はこれまでにない結果である。

- (3) 実軸上の指数型の重み $w(x) = \exp(-Q(x))$ は $T(x) := xQ'(x)/Q(x)$ が有界であるか否かより Freud 型と Erdos 型に分類される。これまでの多くの研究は Freud 型に

関するものであった. 今回は $T(x)$ を評価に入れることによって, Erdos 型重みに関して, いくつかの結果を得た.

雑誌論文⑨では, 多項式近似度を導関数のノルムで評価する Favard 型不等式確立し, MRA number の評価を与えた.

雑誌論文⑧では $|x|$ のべきと $w(x)$ の積を重みとする直交多項式系に関して, その零点から定まる高次 Hermite および Hermite-Fejer 補間多項式の収束と発散について調べた. これは Kanjin-Sakai が Freud 型について考察した結果(Tohoku Math. J. vol. 46 (1994), 181-206 および Journal of Approximation Theory, vol. 80, (1995), 378-389)の拡張になっている.

雑誌論文⑥では $T(x)$ のべきと $w(x)$ の積によって定まる重みと同値の滑らかな重みの構成を行い, それを利用して, 多項式の導関数のノルム評価である Markov-Bernstein 型不等式を得た. 滑らかな重みの構成は今後の研究の基礎として役立つことが期待できる.

雑誌論文④では整関数の Lagrange 補間多項式によるノルム近似評価, および Gauss-Jacobi の求積評価を行った.

また, 雑誌論文③では有界区間上での R.S.Varga の多項式近似による整関数の特徴付けの結果(J. of Approximation Theory, vol. 1 (1968), 176-179) を実軸全体で考察し, 近似の速さに応じて整関数の位数が決まることを示すことができた.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

① H. Nakagawa, N. Suzuki, Carleson inequalities on parabolic Hardy spaces, to appear in Hokkaido Math J., 査読有, 2015

② M. Murata, N. Suzuki, Parabolic approach to Martin boundaries for elliptic equations in skew product form, Potential Analysis, 査読有, vol.40, 2014, 279-305
DOI: 10.1007/s11118-013-9353-x

③ R. Sakai, N. Suzuki, A characterization of real entire functions by polynomial approximation for exponential weights, 数理研講究録別冊, 査読有, vol. B43, 2013, 141-154

④ M. Nishio, N. Suzuki, M. Yamada, Positive Toeplitz operators of finite rank on the parabolic Bergman spaces, Kodai Math., 査読有, J., vol. 36, 2013, 38-49

⑤ G. Nakamura, R. Sakai, N. Suzuki, Interpolation polynomials of entire functions for

Erdos-type weights, J. Math., 査読有, vol. 2013, Art. ID 467351, 2013, 5pp
DOI: 10.1155/2013/467351

⑥ R. Sakai, N. Suzuki, Mollification of exponential weights and its application to Markov-Bernstein inequality, Pioneer J. Math., 査読有, vol. 7, 2013, 83-101

⑦ M. Nishio, N. Suzuki, M. Yamada, Schatten class Toeplitz operators on the parabolic Bergman Space II, Kodai Math. J., 査読有, vol. 35, 2012, 57-77

⑧ J.H.Jung, G. Nakamura, R. Sakai, N. Suzuki, Convergence and divergence of higher-order Hermite or Hermite-Fejer Interpolation polynomials with exponential-type weights, ISRN Math. Anal., 査読有, vol. 2012, Art ID 904146, 31pp
DOI: 10.5402/2012/904169

⑨ R. Sakai, N. Suzuki, Favard-type inequalities for exponential weights, Pioneer J. Math., 査読有, vol. 3, 2011, 1-16

⑩ M. Nishio, N. Suzuki, M. Yamada, Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces, Tohoku Math. J., 査読有, vol. 62, 2010, 269-286

[学会発表] (計 4 件)

① 酒井良二(発表者), 鈴木紀明, A characterization of entire function and approximation, RIMS work shop, Potential theory and its related fields, 2012年9月3日, 京都大学数理解析研究所(京都)

② 西尾昌治(発表者), 鈴木紀明, 山田雅博, Positive Toeplitz operators of finite rank on the parabolic Bergman spaces, 日本数学会 2011年度秋季総合分科会, 2011年9月30日, 信州大学(長野)

③ 鈴木紀明, ポテンシャル論と多項式近似, 2010年度ポテンシャル論研究集会, 2010年11月6日, 大分大学(大分)

④ 中川勇人(発表者), 鈴木紀明, 放物型 Hardy 空間における Carleson 不等式, 日本数学会 2010年度秋季総合分科会, 2010年9月22日, 名古屋大学(名古屋)

[図書] (計 1 件)

① 鈴木紀明, 学術図出版社, 解析学の基礎, 2013, 307

[その他]
ホームページ等
<http://ccmath.meijo-u.ac.jp/~suzukin>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 紀明 (SUZUKI, Noriaki)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：50154563

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究員

西尾 昌治 (NISHIO, Masaharu)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90228156

山田 雅博 (YAMADA, Masahiro)
岐阜大学・教育学部・教授
研究者番号：00263666

下村 勝孝 (SHIMOMURA, Katsunori)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：00101559

(4) 研究協力者

中川 勇人 (NAKAGAWA, Hayato)

酒井 良二 (SAKAI, Ryozi)

伊藤 健太郎 (ITO, Kentaro)