

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 23 日現在

機関番号：37102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540213

研究課題名（和文） 単位球上の正則写像と調和写像に関する研究

研究課題名（英文） A study on holomorphic mappings and harmonic mappings on the unit balls

研究代表者

濱田 英隆 (HAMADA HIDETAKA)

九州産業大学・工学部・教授

研究者番号：30198808

研究成果の概要（和文）：完備双曲的複素多様体上で成立する 1 複素変数及び多複素変数の新しい幾何学的なレブナー鎖の構成法を提案し、その結果として、任意のレブナー偏微分方程式の単葉な解を得た。端点や支持点のレブナー変分がまた端点や支持点になることを証明した。単位円盤上の調和関数やユークリッド単位球上の多重調和写像からなるアフィン線形不変族に対する 2 点歪曲定理を証明した。等質単位球上で、正則線形不変族に対する歪曲度と増大度の上界を得た。

研究成果の概要（英文）：We present a new geometric construction of Loewner chains in one and several complex variables which holds on complete hyperbolic complex manifolds, and as a consequence, we obtain a univalent solution for any Loewner partial differential equation. We proved that the Loewner variation of an extreme point (respectively a support point) is also an extreme point (respectively a support point). We proved the two-point distortion theorems for affine and linearly invariant family of harmonic functions on the unit disc or of pluriharmonic mappings on the Euclidean unit ball. We obtained upper bounds for the distortion and the growth of holomorphic linearly invariant families on homogeneous unit balls.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2010年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 2011年度 | 400,000 | 120,000 | 520,000 |
| 2012年度 | 400,000 | 120,000 | 520,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 1,300,000 | 390,000 | 1,690,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素解析

1. 研究開始当初の背景

(1) 単位円盤 U 上の単葉正則関数で、 $f(0)=0$, $f'(0)=1$ を満たすものに対しては、増

大度定理 $|z|/(1+|z|)^2 \leq |f(z)| \leq |z|/(1-|z|)^2$ が成り立つことが知られている。H. Cartan は、この結果は多変数の単葉

正則写像については成り立たないことを指摘し、星形正則写像、凸写像について研究するよう勧めている。R. W. Barnard, C. H. FitzGerald and S. Gong, M. Chuaqui, 濱田 and G. Kohr は上記の増大度定理を C^n 内のユークリッド単位球 B^n 上の正規化された星形正則写像(タイプ 0 の螺旋型正則写像)やタイプ α の螺旋型正則写像に拡張した。さらに、I. Graham, 濱田 and G. Kohr は、単葉正則写像全体の族の部分族で、タイプ α の螺旋型正則写像を含み、上記の増大度定理が成り立つ族 $S^0(B^n)$ を $f(0,t)=0$ であるレブナー鎖を用いて記述した。 $f(0,t)=0$ であるレブナー鎖 $f(z,t)$ はレブナー微分方程式の解であることが知られている。

(2) Pommerenke によって導入された線形不変族の概念は、単位円盤上の単葉正則関数に対して成り立つ性質を局所単葉正則関数へ拡張する強力な道具である。近年、Barnard, FitzGerald, Gong, Pfaltzgraff, 濱田, Kohr, Graham 達により、多変数の線形不変族の研究が行われている。特に、Pfaltzgraff and Suffridge 濱田-Kohr は、それぞれユークリッド単位球 B^n 、多重円盤 U^n 上でノルム位数を用いて線形不変族の増大度定理、歪曲定理を記述した。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、まず、上記のレブナー微分方程式の任意の解の形を決定する。 U 上の単葉正則関数 f で、 $f(0)=0, f'(0)=1$ を満たすものに対しては、 $f(0,t)=0, Df(0,t)=e^t, f(z,0)=f(z)$ である subordination chain $f(z,t)$ が存在するが、 B^n 上では、存在する場合でも、 $Df(0,t)=e^t I$ とは限らない。それを踏まえて、P. Duren, I. Graham, 濱田, G. Kohr and J.A. Pfaltzgraff 達は $f(0,t)=0, Df(0,t)=e^{tA}$ の場合に任意の解を決定した。本研究では、 $f(0,t), Df(0,t)$ に関する条件を更に一般的にした場合に(あるいは、 $f(0,t), Df(0,t)$ に関する条件なしで)、任意の解を決定したい。これらの解を研究するという新しい手法により、多変数の単葉正則写像の増大度定理の研究に新たな進展をもたらすことが期待できる。

(2) 本研究では、より一般的な有界対称領域上の線形不変族の増大度定理、歪曲定理について研究したい。その意義の1つは、 B^n, U^n だけではなく、カルタン領域などの多くの有界対称領域上の線形不変族について、同時に研究できるところにある。また、今後、単葉正則関数の様々な結果の有界対称領域への新しい拡張が期待できる。

3. 研究の方法

(1) まず、 $f(0,t)=0$ とは限らないレブナー鎖が一般化したレブナー微分方程式を満たすことを示す。そのために、以下の手順を

用いる。

① z に依存しない測度 0 の集合 N が存在して、 $(0, \infty) - N$ 上、 $f(z,t)$ は、 t について微分可能であることを示す。

② $\phi_{s,t}(z)=f_t^{-1}(f_s(z))$ が evolution 族となることを示す。

③ 以上を使って、 $f(z,t)$ が一般化したレブナー微分方程式を満たすことを示したい。

次に、一般化したレブナー微分方程式の両正則解 $f_t(z)$ がレブナー鎖であることを示す。そのために、以下の手順を用いる。

④ evolution 族 $\phi_{s,t}(z)$ が存在して、 $f_s(z)=f_t(\phi_{s,t}(z))$ が成り立つことを示す。

⑤ $f_t(z)$ がレブナー鎖であることを示す。

上記の結果の新しい応用として、局所両正則写像が、星形写像や螺旋形写像であるための、レブナー鎖を用いた特徴付けや解析的特徴付けについて考察する。

(2) Pfaltzgraff and Suffridge は、ユークリッド単位球上の線形不変族に対する増大度定理、歪曲定理を証明した。その証明方法は

① まず、位数有限の線形不変族が正規族であることを示している。

② また、証明の中で、ノルムがユークリッド内積から導かれたノルムであることを使っている

が重要であり、有界対称領域上の場合には、これら2つの問題をクリアする必要がある。

①について、ユークリッド単位球上 B^n では、 B^n 上のみで成立する凸写像の特徴づけを用いることにより、ノルム位数有限の線形不変族の凸半径が正であることを示し、それを応用して、正規族であることを示している。

有界対称領域上の場合にも、凸半径が正であることを別の方法で証明し、それを応用して、正規族であることを示したい。凸半径が正であることを証明することが困難である場合は、濱田達による星型写像になるための十分条件を応用して星型半径について調べてみる。

②について、有界対称領域の場合は、内積を用いない別証明を考える。それが困難である場合は、まず、 J^* -代数の単位球の場合に考えてみる。 J^* -代数の元は、ヒルベルト空間 H からヒルベルト空間 K への有界線形写像であるから、 H や K の内積を使った証明ができないか調べてみる。

4. 研究成果

(1) A が C^n の線形変換で $m(A)>0$ を満たすとき、 A 正規化されたレブナー微分方程式の標準解が subordination chain であることを示した。

(2) A が C^n の線形変換で $m(A)>0$ を満たすとき、 A 正規化されたレブナー微分方程式の多項式有界である解の形を決定した。

(3) 更に、 A にある条件を仮定すると、 A 正規化されたレブナー微分方程式の多項式有界である解がただ1つの A 正規化された有界な解であることを示した。

(4) L が C^n の線形変換で $f(z, t)$ がレブナー微分方程式の A 正規化された多項式有界な解であるとき、 $g(z, t)=L(f(z, t))$ が多項式有界であるための十分条件を与えた。

(5) L が C^n の線形変換で $f(z, t)$ がレブナー微分方程式の A 正規化された有界な解であるとき、 $g(z, t)=L(f(z, t))$ が多項式有界である例や多項式有界でない例を与えた。

上記の結果は、近年の Duren, Graham, 濱田 and Kohr (Mathematische Annalen, 2010), Voda (Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011) などの重要な論文を更に発展させたものであり、非常に意義があり重要な結果である。今後は、 A 正規化されていない、より一般的なレブナー微分方程式の解について研究したい。また、その解を応用して、単葉性や擬等角拡張性に関する新しい結果を得たい。

(6) 単位円盤上の調和関数やユークリッド単位球上の多重調和写像からなるアフィン線形不変族に対する2点歪曲定理を証明した。特に、局所単葉である調和関数や多重調和写像が単葉であるための必要十分条件を証明した。

(7) 等質単位球上で、線形不変族について研究した。線形不変族のノルム位数と位数 $1/2$ の星型との関係に関する結果を得た。ある線形不変族の単葉半径を得た。更に、有限次元でノルム位数が有限のとき、線形不変族の正規性を示し、歪曲度と増大度の上界を得た。得られた結果は、古典的カルタン領域や多重円盤で成立する。

(8) Roper と Suffridge による1995年の研究以降、さまざまな幾何学的性質を持つ C^n の単位球上の正則写像を同様の性質を持つ低次元の写像を用いて構成する研究がなされてきた。そのような幾何学的性質の中には、凸、星型、螺旋型などが含まれる。幾何学的性質が保たれるということは、subordination chains が保たれるということと関係がある。最近、Elin は半群を用いたバナッハ空間上の拡張作用素を導入した。本研究では、これまでの拡張作用素の多くをより一般化した新しい拡張作用素を Elin の手法を用いて定義し、subordination chains が保たれることを示した。

(9) C^n のユークリッド単位球上の正規化された両正則写像全体のコンパクト部分族の端点と支持点について研究した。端点や支持点のレブナー変分がまた端点や支持点になることを証明した。また、端点や支持点が拡張作用素により、端点や支持点に写されることを証明した。

(10) 完備双曲的複素多様体上で成立する1複素変数及び多複素変数の新しい幾何学的なレブナー鎖の構成法を提案した。位数 d の evolution 族と同じ位数のレブナー鎖の間に本質的に1対1の対応があることを証明した。結果として、任意のレブナー偏微分方程式の単葉な解を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

- ① I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, and M. Kohr, Univalent subordination chains in reflexive complex Banach spaces, Complex Analysis and Dynamical Systems V, Contemporary Mathematics 591, to appear, 査読有.
- ② L. Arosio, F. Bracci, H. Hamada and G. Kohr, An abstract approach to Loewner chains, J. Anal. Math., 119 (2013), 89-114, 査読有.
DOI: 10.1007/s11854-013-0003-4
- ③ H. Hamada and G. Kohr, Univalence criterion and quasiconformal extension of holomorphic mappings, Manuscripta Math., 141 (2013), 195-209, 査読有.
DOI: 10.1007/s00229-012-0568-8
- ④ H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Trace-order and a distortion theorem for linearly invariant families on the unit ball of a finite dimensional JB^* -triple, J. Math. Anal. Appl., 396 (2012), 829-843, 査読有.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.07.027
- ⑤ H. Hamada and T. Honda, Some generalizations of Bohr's theorem, Math. Meth. Appl. Sci., 35 (2012), 2031-2035, 査読有.
DOI: 10.1002/mma.2633
- ⑥ I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and M. Kohr, Extreme points, support points and the Loewner variation in several complex variables, Sci. China Math., 55 (2012), 1353-1366, 査読有.
DOI: 10.1007/s11425-012-4376-0
- ⑦ I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, Extension operators and subordination chains, J. Math. Anal. Appl., 386 (2012), 278-289, 査読有.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.07.064
- ⑧ H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Linear invariance of locally biholomorphic mappings in the unit ball of a JB^* -triple, J. Math. Anal. Appl., 385

(2012), 326-339, 査読有.

DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.06.055

- ⑨ P. Duren, H. Hamada and G. Kohr, Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings, Trans. Amer. Math. Soc., 363(2011), 6197-6218, 査読有.
DOI: 10.1090/S0002-9947-2011-05596-0
- ⑩ H. Hamada, Polynomially bounded solutions to the Loewner differential equation in several complex variables, J. Math. Anal. Appl., 381(2011), 179-186, 査読有.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.02.080

[学会発表] (計7件)

- ① 濱田 英隆、Loewner chains on complete hyperbolic complex manifolds, 2013 日本数学会年会 (招待講演), 2013 年 3 月 23 日, 京都大学
- ② 本田 竜広、濱田 英隆、Gabriela Kohr、Distortion theorems for linearly invariant families, 2013 日本数学会年会, 2013 年 3 月 23 日, 京都大学
- ③ Ian Graham、濱田 英隆、Gabriela Kohr、Extension operators and subordination chains, 2012 日本数学会秋季総合分科会, 2012 年 9 月 19 日, 九州大学
- ④ Peter Duren、濱田 英隆、Gabriela Kohr、Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings, 2012 日本数学会秋季総合分科会, 2012 年 9 月 19 日, 九州大学
- ⑤ 本田 竜広、濱田 英隆、G. Kohr、Linear invariance of locally biholomorphic mappings, 2012 日本数学会年会、2012 年 3 月 27 日、東京理科大学
- ⑥ 濱田 英隆、Solutions for the Loewner PDE and some applications in several complex variables、多変数関数論冬セミナー2011(招待講演)、2011 年 12 月 18 日、広島大学
- ⑦ 濱田 英隆、The Loewner differential equation and subordination chains in several complex variables、2011 日本数学会年会、2011 年 3 月 23 日、早稲田大学

[その他]

ホームページ等

<http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/kenkyuu.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

濱田 英隆 (HAMADA HIDETAKA)
九州産業大学・工学部・教授

研究者番号 : 301998808

(2) 研究分担者 ()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

本田 竜広 (HONDA TATSUHIRO)
広島工業大学・工学部・准教授
研究者番号 : 20241226