

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 23 日現在

機関番号：12604

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540215

研究課題名(和文) 局所コンパクト量子群と測度付き歪群の研究

研究課題名(英文) Study on locally compact quantum groups and measured groupoids

研究代表者

山ノ内 毅彦 (Yamanouchi, Takehio)

東京学芸大学・教育学部・教授

研究者番号：30241293

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、作用素環論に現れるエルゴード的測度付き同値関係とその部分同値関係を、代数における群の一般化として捉えるという観点から研究を試みた。特に部分同値関係の中でも研究代表者が以前の研究で導入した概念である「ヘッケ対」をなす同値関係とその部分同値関係に注目をした。この概念は数論のヘッケ対に起源を發し、よって数論で確立されているのと同様な理論が部分同値関係の枠組みでも展開できるのではないかという予想をもって研究を開始した。本研究では、実際にヘッケフォンノイマン環の定義・構成を与えることや、Schlichting 完備化との関係を与えることで、その予想の正当性を支える研究成果が得られた。

研究成果の概要(英文)：In this research, I initiated a study on ergodic measured equivalence relations together with their sub relations, from the viewpoint that they are naturally regarded as a generalization of groups in algebra. During the research, I particularly focused on a pair of an equivalence relation and its sub relation that together form a "Hecke pair", which is a notion introduced in my earlier research. The notion of "Hecke pair" was originally developed and studied in number theory, so I started my research, hoping (conjecturing) that I might be able to build a similar theory in the framework of measured equivalence relations. As a result along this line of research, I was able to define and construct, from a Hecke pair of equivalence relations, an operator-algebraic version of a Hecke algebra. I was also able to clarify a relation between our theory and the notion of Schlichting completion. In this way, I obtained several results that seem to support the validity of my conjecture.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数解析学 作用素環 フォンノイマン環 局所コンパクト量子群 測度付き同値関係 エルゴード性
ヘッケ対 ヘッケ環

1. 研究開始当初の背景

(1) 作用素環論的立場から捉えた量子群は、様々な研究者達の結果を経て 2000 年初頭に Kustermans と Vaes によりその明確な定義が与えられ、研究の枠組みが確立された。しかし、それ以降、研究者の関心は専らコンパクト量子群に向けられていたため、本研究開始時点において、局所コンパクト量子群全般にわたる構造的な解析は、途中単発的な結果は幾つかあったものの、通常の群論における一般論と比較してみれば未だ発展途上の段階であったと言ってよい。

(2) 一方、測度付き亜群は、任意の測度付き亜群からある手続きを経ることで常に作用素環を構成することが出来るという事実をもとに、特に 70 年代の Connes の画期的な仕事以降活発に研究されてきた。しかし、本研究開始時点までは大体において測度付き亜群から構成された作用素環の方に考察の重点が置かれ、測度付き亜群そのものに焦点を絞った研究が十分になされてきたとは言いがたかった。特に、測度付き亜群の生みの親とも言える Mackey の virtual subgroup という考えの原点に立ち返れば、彼の発想に沿って測度付き亜群そのものの研究を押し進めるといふやり方は決して間違った方向ではなかったが、その研究の絶対量は少なかったと言える。

2. 研究の目的

研究目的は大雑把に言って以下のように説明される。

本研究の研究対象である量子群および測度付き亜群は、その生い立ちから共に代数学における群の概念を広く拡張したものであるとして捉えられる。通常の群が任意に与えられたとき、その構造を解析するにあたって部分群を調べ尽くすことが有効であることは言うまでもない。従って、量子群または測度付き亜群が、上に述べたように群の一般化であるという捉え方をすれば、それらの構造を理解する上で「部分群」に相当する対象を研究することが重要になるであろうことは想像に難くない。本研究の目的は、そのような観点から量子群そして測度付き亜群の「部分群」解析を行うことによって、与えられた「群」構造を究明することであった。

(1) 上に述べた研究目的のもと、まず局所コンパクト量子群に関する本研究の目的は次のようなものであった。

群とその部分群が与えられたとき、対応する商空間、商写像および商写像の切断写像を考えることは自然であり、これらが様々な概念または数学的構成において大切な役割を果たすことは周知の事実である。局所コンパクト量子群の場合、その「部分群」が与えられたとき、付随する商空間、商写像に対応するものはすでに定義がなされているが、商写像の切断写像にあたるものは、その重要性

にもかかわらずまだ明確な定義は与えられていなかった。本研究では、この切断写像の「正しい」構成・定義を与え、その諸性質を明らかにすることが目的の 1 つであった。

コンパクト群の作用素環への作用を解析するにあたって、部分群からの誘導作用が基本的な役割を果たしていることはよく知られている。ここで、誘導作用とは粗く言うと群表現における誘導表現に相当するものである。このことから、局所コンパクト量子群の作用素環への作用の考察において、「部分群」の作用の「誘導作用」が不可欠になることは容易に想像できる。本研究では、局所コンパクト量子群作用の誘導作用の「正しい」構成・定義を与え、その一般論を展開することが目的の 1 つであった。ここで、通常の群の誘導表現論からも予測されるように、「誘導作用」の構成には述べた量子化された商写像の切断写像の概念が必ず必要になってくるであろうことから、とは密接に結びついた研究課題であると言える。

(2) 次に、測度付き亜群に関する本研究の目的は以下の通りであった。

測度付き亜群の中でも極めて大切な例として測度付きエルゴード同値関係がある。その重要性は次のように説明される。離散群の測度空間へのエルゴード的作用がある場合、この情報を Mackey 流に群作用軌道に重点を置いて記述した対象が測度付きエルゴード同値関係である。また、Feldman-Moore の結果によれば、測度付きエルゴード同値関係が与えられると、そこからある手続きを通して「カルタン部分環」と呼ばれる作用素環を含む因子環(フォンノイマン環)が構成される。逆に、抽象的にカルタン部分環 A を含む因子環 M が与えられると、そこから測度付きエルゴード同値関係が 1 つ構成されることが分かっている。要約すると、測度付きエルゴード同値関係は、カルタン部分環を含む因子環という作用素環にとって非常に重要なクラスと密接に対応している訳である。本研究の目的は、測度付き亜群でも、この測度付きエルゴード同値関係に焦点を絞り、2. の最初に述べた観点から、測度付きエルゴード同値関係の「部分群」解析を実行することで測度付きエルゴード同値関係自身の構造に迫ることであった。

測度付きエルゴード同値関係において「部分群」に相当するものは測度付きエルゴード部分同値関係である。部分同値関係が与えられると、先に説明した Feldman-Moore の手続きによりカルタン部分環 A と因子環 M の間に因子環 N が構成される。逆に、カルタン部分環 A を含む因子環 M と、その中間因子環 N が与えられると、連携研究者である青井氏の結果により部分同値関係が得られる。従って、カルタン環を含むような因子環の理論(因子環理論は既に作用素環で確立された重要な理論である)は、測度付きエ

ルゴード部分同値関係における部分同値関係の理論と同等であると言える。この同等性に着目して因子環論にアプローチをすることが本研究の目的であり、研究の独自性でもあった。

群論の正規部分群に相当するような部分同値関係の定義は Feldman-Sutherland-Zimmer により与えられ、その基本的性質が考察された。研究代表者は、彼らの考察をより押し進め、過去の研究においてこの正規部分同値関係の作用素環論的意味を明らかにした。当然の成り行きとして、本研究では群論の正規部分群性を弱めた概念である、「ヘッケ対」という性質に注目し、そのエルゴード同値関係の枠組みにおける数学的意味、および対応する作用素環論的性質を明らかにすることを目的として挙げていた。

3. 研究の方法

「研究の目的」の(1)で述べた研究に関しては、その内容の性格上、まず の研究を押し進める方法をとった。何故ならば、 で記述したように、局所コンパクト量子群とその「部分群」が与えられたとき、それに付随する「商写像」の切断写像なるものをもし正しく定義できたとすれば、それを利用して局所コンパクト量子群の作用素環への作用の誘導表現の明確な定義が可能になると容易に推測できるからである。

「研究の目的」の(2)で述べた研究に関しては、連携研究者として青井久氏に研究組織に参画して頂いた。その理由は、本研究の発端となったエルゴード同値関係とその部分同値関係に対する「ヘッケ対」という概念を、過去の共同研究の中で提案したという経緯があるからである。従って、青井氏とは本研究の全期間を通して連携者として共同研究を行うという方法を採用した。

4. 研究成果

(1) 局所コンパクト量子群の部分群の研究、特に切断写像の定義とその性質について：局所コンパクト量子群 G とその「部分群」 H が任意に与えられたとき、それに対応する量子化の意味での切断写像 $G/H \rightarrow G$ の正確な定義は残念ながら研究期間中に得ることはできなかった。ただ、一般の局所コンパクト量子群ではないが、コンパクト量子群のような特別な量子群については切断写像と呼ぶにふさわしい写像が存在することを考察することができた。このような「特別な」場合というのは、考えている「部分群」に常に正規条件付き期待値が存在することがポイントとなっている。しかしながら、一般の局所コンパクト量子群についてはこのような写像の存在は期待できない。この点が研究の成果が得られなかった大きな理由である。今後の課題としては、コンパクトでないような局所コンパクト量子群とその部分群の具体例を組織的に調べ上げ、そのことから切断写

像の正確な定義の条件を理解したいと考えている。

(2) 測度付きエルゴード同値関係とそのエルゴード部分同値関係のなす「ヘッケ対」について：

「ヘッケ対」の概念はもともと数論における群のヘッケ対を拡張した概念になっており、既に数論で確立されているものと同様な理論がエルゴード部分同値関係の枠組みにおいても展開できるのではないかと代表者と青井氏は研究当初から予想していた。本研究では、その期待される理論が実際に展開可能であることを証明することができた。

具体的には、ヘッケ対となっているエルゴード同値関係とそのエルゴード部分同値関係からは、数論におけるヘッケ環を拡張した「ヘッケフォンノイマン環」と呼ばれる作用素環を構成できることを明らかにした。

一方、ヘッケ対をなす同値関係からは Feldman-Moore の手続きより因子環と部分因子環が得られることは説明したが、ヘッケフォンノイマン環がこの因子環の対から不変量として発生する相対可換子環中に出現することを明らかにし、これによって Jones による部分因子環の理論とも深い係わり合いがあることを示すことに成功した。

また、ヘッケ対の定義を同値関係の「言葉」だけで与えることにも成功した。もともとのヘッケ対の定義は、代表者の過去の研究において作用素環論の枠組みの中で与えられたが、本研究では新たな観点に立った測度論的定義を与えることができた。

未だ論文としては未発表ではあるが、本研究最終年度にかけて、ヘッケ対に対する Schlichting 完備の理論について研究を開始した。群-部分群のヘッケ対が与えられると、その情報から Schlichting 完備という手続きを経て新たな位相的ヘッケ対を作り出す方法が存在する。研究成果は、エルゴード的同値関係のヘッケ対が与えられたとき、その対から誘導される指数コサイクルの漸近的値域の組は群のヘッケ対を成すことを明らかにしたことである。通常、指数コサイクルは可算集合の変換群全体のなすポーランド群の中に値をとることを考えると、その漸近的値域が実は局所コンパクト群になっていることは特筆に値する。この特殊な現象を説明するため、ヘッケ対から誘導される指数コサイクルとして、極めて特別な性質をもつ指数コサイクルが構成されることも証明できた。

一方で、指数コサイクルの漸近的値域群の組は一般に指数コサイクルの選び方、正確には同値関係の選択関数に大きく依存しているため、上に述べた成果はその意味でまだ不十分であった。研究代表者は、指数コサイクルの漸近的値域群以外により効果的にもとのエルゴード的部分同値関係の情報を含んだ(理想的には同値関係のみで決定される)

群ヘッケ対が存在する(定義できる)のではないかという予想のもと最終年度の研究を開始した。その結果、その候補者となり得るヘッケ対の「小さい」部分群の特定には成功したと考えている。従って、現時点では予想されるヘッケ対において「大きい」群がどのように定義されるか、という問題が残っている。これに関しては残念ながら未だ部分的な結果しか得られていない。しかし、その「大きい」群の候補となる物についての見解(つまり予想される具体的な定義)は連携者である青井氏と一致している。またその見解を補強する結果も幾つか得られている。よってこの対象が実際に我々が探しているものであることを立証する作業は今後の研究課題として残された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

H. Aoi, T. Yamanouchi, Hecke von Neumann algebra of ergodic discrete measured equivalence relations, Publications of Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 査読有, Vol. 46, 2010, pp. 607-667, DOI 10.2977/PRIMS/20

[学会発表](計 1 件)

青井 久 (発表者)、山ノ内 毅彦、Schlichting completion of Hecke pairs、2014 年日本数学会春季・函数解析分科会、2014 年 3 月 17 日、学習院大学、東京都

[その他]

ホームページ等

<http://www.u-gakugei.ac.jp/~tyamanou/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山ノ内 毅彦 (YAMANOUCHI, Takehiko)

東京学芸大学・教育学部・教授

研究者番号：3 0 2 4 1 2 9 3

(2) 連携研究者

青井 久 (AOI, Hisashi)

立命館大学・理工学部・准教授

研究者番号：9 0 3 9 6 2 7 6