

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年3月31日現在

機関番号：12201

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540218

研究課題名（和文）擬軌道尾行性によるホモクリニックラスの特徴付けに関する研究

研究課題名（英文）ON THE CHARACTERIZATION OF HOMOCLINIC CLASSES BY MEANS OF THE SHADOWING PROPERTY

研究代表者

酒井 一博（SAKAI Kazuhiro）

宇都宮大学・教育学部・教授

研究者番号：30 205702

研究成果の概要（和文）：

Anosov-Bowen 以来、擬軌道尾行性（shadowing property）の概念は力学系理論の研究において様々な場面で現れ、力学系の研究において常に重要な役割を担ってきた。近年、SP 理論の発展には特に目覚しいものがあり、力学系の数値計算的研究の基盤を固めるだけでなく、多くの興味深い定性論的研究結果も生み出されている。本研究の目的は、SP をもつ力学系あるいは部分力学系を微分幾何学的力学系理論の立場から特徴付けることである。

研究成果の概要（英文）：

Since Anosov and Bowen's works, the notion of the pseudo-orbit shadowing property very often appears in the several branches of the theory of dynamical systems, and usually plays an important role in the investigation. The latest developments of the shadowing theory of dynamical systems are very remarkable; in fact, the shadowing theory is not only a base of numerical study of dynamical systems but also gives rise to lots of important consequences in qualitative theory of dynamical systems. The purpose of this research project is to characterize the dynamical systems or subsystems possessing the shadowing property from view point of the differential geometric theory of dynamical systems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，大域解析学

キーワード：力学系

## 1. 研究開始当初の背景

力学系を数値計算的手法によって研究する場合、コンピュータにより計算された力学系の軌道には（一般に）四捨五入等による誤差が含まれる。このような軌道を擬軌道（pseudo-orbit）と呼ぶ。もし、力学系が擬

軌道尾行性（以下、SP と表す）をもてば、すべての擬軌道はその力学系の真の軌道であることが保障され、コンピュータにより計算された力学系の軌道はその定性的性質を反映していると言える。すなわち、力学系の数値計算的手法による研究において精度保

障をする場合、その力学系が SP をもつかどうか非常に重要かつ基本的な問題となる。

一般に微分可能多様体  $M$  上すべての微分同相写像（力学系）が SP をもつとは限らないが、SP をもつ微分同相写像の全体は、微分同相写像全体の空間の中で  $C^0$ -位相に関し稠密になることが知られている。 $M$  上の SP をもつ微分同相写像全体を  $SP(M)$  で表し、その  $C^1$ -位相に関する内点集合を  $SP^A(M)$  で表す ( $f \in SP^A(M)$  は  $C^1$ -位相に関する SP-安定性をもつ)。報告者自身により、 $SP^A(M)$  は双曲性 (Axiom A + 強横断性条件) として特徴付けられている。すなわち、力学系  $f$  が  $SP^A(M)$  の要素であることと  $f$  が構造安定性を満たすことは同値である。

SP 理論における最も基本的な研究対象は、力学系  $f$  の鎖回帰集合 (chain recurrent set) と呼ばれる  $f$ -不変閉部分集合  $R(f) \subset M$  である (非遊走集合  $\Omega(f)$  は  $R(f)$  の部分集合)。 $M$  の点  $x$  から点  $y$  へ、任意に誤差の小さい  $f$  の擬軌道が存在するとき  $x \approx_f y$  と書く。 $R(f)$  は  $x \approx_f x$  を満たす点  $x$  全体である。 $R(f)$  への制限  $f|_{R(f)}$  が SP をもつ微分同相写像全体の  $C^1$ -位相に関する内点集合を  $SP^A(M)|_R$  で表せば、 $SP^A(M)|_R$  は  $\Omega$ -安定性 (Axiom A + no-cycle) として特徴付けされる。

Smale による微分幾何学的力学系理論は、双曲性と構造安定性という 2 つの概念を基礎として研究が開始され、「構造安定性と双曲性は同値」という Palis-Smale による  $C^r$ -構造安定性予想解決へ向けての研究が同理論の発展に大きな役割を果たした。 $C^1$ -構造安定性予想は 1987 年に Mane により解決され、その後 Hayashi-Aoki-Wen らによって一般化された形の  $C^1$ -構造安定予想も証明された。上記 2 つの結果は、これらの成果の応用である。

関係  $\approx_f$  は  $R(f)$  上の同値関係であり、それによる同値類は鎖成分 (chain component) と呼ばれる (鎖成分は、SP 理論における基本的かつ最小な意味ある  $f$ -不変閉部分集合である)。点  $p$  を  $f$  の双曲型周期点とすると、Hartman の定理より  $C^1$ -位相に関し  $f$  に近い任意の  $g$  に対し ( $p$  の近くに)  $g$  の双曲型周期点  $p_g$  が一意に存在する。報告者は、双曲型周期点  $p$  を含む鎖成分  $C_f(p)$  に対し、次のような  $C^1$ -位相に関する自然な SP-安定性を定義し、ある付加条件の下で以下の (I) のような  $C_f(p)$  の特徴付けを行なった:  $C_f(p)$  が  $C^1$ -安定的擬軌道尾行性をもつとは、「 $C^1$ -位相に関し  $f$  に近い任意の  $g$  に対し、 $g|_{C_g(p_g)}$  が SP をもつこと」とする。ただし、 $C_g(p_g)$  は  $p_g$  を含む  $g$  の鎖成分である。

(I)  $C_f(p)$  は  $C^1$ -安定的擬軌道尾行性をもつ  $\Leftrightarrow C_f(p)$  は双曲的 (hyperbolic)

Wen-Gan-Wen は Liao 理論を応用することにより、報告者の証明をさらに発展・改良し付加条件を完全に取り除くことに成功した。

力学系  $f$  の双曲型周期点  $p$  の安定多様体  $W^s(p)$  と不安定多様体  $W^u(p)$  の交点は、 $p$  のホモクリニック点と呼ばれている。横断的に交わる  $p$  のホモクリニック点全体の閉包を  $p$  のホモクリニッククラス (homoclinic class, 以下、HC で表す) といい  $H_f(p)$  で表す。よく知られているホースシューもある双曲型不動点の HC である。

HC は力学系理論における基本的かつ最小な意味ある研究対象であり、一般に鎖成分よりも真に小さい。実際、サドル・ノードホースシューは位相的にはホースシューと同じであり、ある双曲型周期点  $q$  の HC である。このとき、サドル・ノードホースシューは  $q$  を含む鎖成分よりも真に小さい。本研究では双曲型周期点  $p$  を含む HC に対し、SP についての  $C^1$ -位相に関する安定性を定義し  $H_f(p)$  の特徴付けを行う。

$H_f(p)$  が  $C^1$ -安定的擬軌道尾行性をもつとは、「 $C^1$ -位相に関し  $f$  に近い任意の  $g$  に対し、 $g|_{H_g(p_g)}$  が SP をもつこと」とする。ただし、 $H_g(p_g)$  は  $p_g$  を含む  $g$  の HC である。

## 2. 研究の目的

本研究では  $C^1$ -安定的擬軌道尾行性をもつ HC を微分幾何学的力学系理論の視点から特徴付ける。具体的には、

(II)  $H_f(p)$  は  $C^1$ -安定的擬軌道尾行性をもつ  $\Leftrightarrow H_f(p)$  は双曲的

の証明、実際には  $\Rightarrow$  の証明である (逆向きは知られている)。

サドル・ノードホースシューは SP をもつが、サドル・ノード周期点 (固有値 1 をもつ) を含むため双曲的ではない。従って、上記問題を考慮することは、力学系理論の立場から大変興味あるものと言える。

本研究は、(I) の場合と以下の 2 点でその手法が大きく異なる: (a)  $H_f(p)$  の周期点の一樣双曲性の証明と、(b)  $H_f(p)$  が双曲的でないとは仮定して構成される、その絶対値が 1 に近い固有値をもつ周期点が  $H_f(p)$  に属することの証明である。

最近では構造安定性理論を基礎にコンピュータ支援による力学系の分岐についての研究が盛んに行われ、その研究成果はカオスの研究等、工学を含む様々な分野で応用されつつある。分岐理論は (構造安定でない) 力学系の 1-パラメーター族において  $C^r$ -位相 (一般に  $r$  は十分大) の下でパラメーターと共にその軌道構造がどのように変化するかを調べる理論で、カオス現象を数学の立場で説明するためにはその研究が不可欠であることが

わかってきている。コンピュータ支援による分岐現象の研究では、HCにおける分岐現象の解明が中心となる。本研究では、上記(a)、(b)の解決に分岐理論等の導入を計画した。

SPをもつ力学系は、ある程度一般的なクラスであるので、本研究により得られる結果や研究方法は、「分岐現象解明に向けての一般論的研究」において基本的役割を果たすことが期待できる。また、我々の研究目的が達成されれば数学の立場でのカオスの研究にも大きく貢献できる。このような研究は、国内外を問わず未だ行われていなかった。

### 3. 研究の方法

$\text{Diff}(M)$ を $C^\infty$ -閉多様体 $M$ 上の微分同相写像全体とし $C^1$ -位相を導入する。本研究の目的は、 $C^1$ -安定的擬軌道尾行性をもつ $H_f(p)$ の双曲性の証明である。

証明は、報告者自身が過去の研究で開発した双曲性を示すための一連の方法を踏襲するが、その単なる拡張では処理できない部分が2箇所ある。本研究では、分岐理論と $C^1$ -一般性についての研究成果を融合することによりその解決を目指した。具体的には $H_f(p)$ は $C^1$ -安定的擬軌道尾行性をもつと仮定し、次の手順で研究を推進した：

① $H_f(p)$ 上の接ベクトルバンドルに占有的分割(dominated splitting)が存在すること、及び $H_f(p)$ の任意の双曲型周期点の安定な固有空間の次元は一定であることを証明、

② $H_f(p)$ の双曲型周期点についてのある種の「一様双曲性」を証明、そして最後に

③ $H_f(p)$ の双曲性を証明。  
である。

以下、研究開始時点の進捗と本研究における課題について説明する。

ステップ①は、報告者自身が開発した方法を用いることにより完了済み。実際、任意の $f \in \text{SP}(M)$ に対し、任意の双曲型周期点の安定多様体・不安定多様体は横断的に交わることを示した。

$p$ のホモクリニック点 $x$ における安定多様体 $W^s(x)$ 、不安定多様体 $W^u(x)$ の接平面は $H_f(p)$ 上の占有的分解の候補となる。これらのなす角度が下からバウンドされることがわかり、占有的分解の存在が証明される。また、SPより、任意の双曲型周期点 $q \in H_f(p)$ に対し、 $W^{s(u)}(p) \cap W^{u(s)}(q) \neq \emptyset$ がわかる。もし、 $q$ の安定な固有空間の次元が $p$ のそれと異なるとすると、いずれか一方の交点は非横断的となる。この事実により $C^1$ -安定的擬軌道尾行性に矛盾することが示される。

ステップ②の推進には、報告者が開発した方法は役に立たない。報告者は、鎖成分 $C_f(p)$ についての $C^1$ -安定的擬軌道尾行性のもとで、次の議論を行なった：周期点の双曲性が一様でないとは仮定すると、絶対値が(いくらでも)

1に近い固有値 $\lambda$ をもつ双曲型周期点 $q \in C_f(p)$ が存在する。SPより $W^{s(u)}(p)$ と $W^{u(s)}(q)$ は(横断的に)交わることがわかる。 $|\lambda| \neq 1$ より、この横断的交わりを保存したまま $f$ 摂動して、正規双曲的(normally hyperbolic) $g$ -不変曲線 $I$ (または $g$ -不変サークル $C$ )を構成することができる( $g$ は $f$ の摂動)。特に、 $g|_I = \text{identity}$ (または $g|_C = \text{rotation}$ )となる。

$W^{s(u)}(p_g, g) \cap W^{u(s)}(q_g, g) \neq \emptyset$ より、 $I$ (または $C$ )が鎖成分 $C_g(p_g)$ に含まれ、更に正規双曲性より $g|_I$ (または $g|_C$ )はSPをもつことがわかる。一方、恒等写像や回転写像はSPをもたないことがよく知られていて矛盾に至る。しかし、この議論の中で構成された $I$ (または $C$ )は、一般に $H_f(p)$ に含まれるかどうか全くわからない。従って $H_f(p)$  $C^1$ -安定的擬軌道尾行性の下では、上記と同様な証明方法は使えない。

このステップの証明が本研究における第1の課題であった。その解決に向けての方針は分岐理論における研究成果、特にサドル・ノード分岐とSPについての研究成果の応用である。絶対値が1に近い固有値の双曲型周期点 $q$ が $H_f(p)$ に存在すると仮定すると、少しの摂動によりサドル・ノード分岐が起こる。申請者自身の研究成果により、サドル・ノード周期点の近傍では、SPが成立しないことがわかっており、 $H_f(p)$  $C^1$ -安定的擬軌道尾行性に対し矛盾を導けることが期待された。

ステップ③の推進が、本研究における第2の課題であった。 $H_f(p)$ が双曲的でないとは仮定すると、Liao理論にSPを応用することにより $H_f(p)$ の任意の近傍 $U$ に対し、その軌道全体が $U$ に含まれかつ絶対値が(いくらでも)1に近い固有値をもつような双曲型周期点 $q$ を構成することが可能である。

北京大学のチームは、( $C_f(p)$ の $C^1$ -安定的擬軌道尾行性の仮定の下)  $U$ が任意であることと①より、 $q$ は $p$ の鎖成分 $C_f(p)$ に含まれることが示され②に反することがわかり、鎖成分の双曲性が証明された。本研究では $q \in H_f(p)$ を示す必要があるが、北京大学のチームの方法は役に立たない。

このステップでは、以下の性質(\*)を証明する必要がある。

異なる2つの周期点 $p, q$ のそれぞれの安定多様体・不安定多様体が互いに横断的に交わる時 $p \sim q$ と表す。 $U$ を $H_f(p)$ の十分小さな近傍とする。このとき、

(\*)  $q$ が双曲型周期点でその軌道全体が $U$ に含まれるならば、 $p \sim q$ が成り立つ。

性質(\*)が証明できれば、①、②および既に知られている事実を応用することにより $H_f(p)$ の双曲性が証明できる。本研究では、

力学系の一般性についての結果と  $H_f(p)$   $C^1$ -安定的擬軌道尾行性との融合を図ることにより性質(\*)の証明に挑戦した。まず、双曲型周期点の安定多様体・不安定多様体が互いに横断的に交わる微分同相写像は、 $C^1$ -位相に関して稠密であること(Kupka-Smaleの定理)や林氏によるConnecting Lemmaから導出される一般的性質、更に、 $C^1$ -genericな微分同相写像  $f$  に対しては対応  $f \mapsto H_f(p)$  が上半連続であること等を利用し、「 $C^1$ -genericな微分同相写像  $f$  に対し、 $f$  が  $C^1$ -安定的擬軌道尾行性をもてば  $H_f(p)$  が双曲的であることを示すこと」を計画。次にもう一度  $C^1$ -安定的擬軌道尾行性を利用し  $C^1$ -genericの仮定を取り除くことを目指した。

#### 4. 研究成果

前述のように本研究は、 $C^1$ -安定的擬軌道尾行性の仮定のもと、次の手順で研究を進めた：①  $H_f(p)$  上の接ベクトルバンドルにおける占有的分割が存在すること及び  $H_f(p)$  の任意の双曲型周期点の安定な固有空間の次元は一定であることの証明、②  $H_f(p)$  の双曲型周期点についてのある種の一様双曲性を証明、そして最後に ③  $H_f(p)$  の双曲性の証明、である。

①のステップは平成22年度以前に完了。平成24年度は、平成23年度に引き続き②、③の証明に取り組んだ。研究代表者自身による、鎖成分  $C_f(p)$  についての  $C^1$ -安定的擬軌道尾行性のもとでの研究成果や証明技法を基に、分岐理論における研究成果、特にサドル・ノード分岐と擬軌道尾行性についての研究成果の応用を試みたが、現時点では未だその完全な解決には至っていない。

本研究の推進過程において、北京大学のチームが開発した証明技法(Liao理論)を応用し、任意の鎖成分(周期点を含むとは限らない)に対し、局所極大という付加条件の下でその双曲性を証明している(数学専門雑誌に掲載が決定)。周期点の存在を仮定していない点、 $C_f(p)$  や  $H_f(p)$  の場合と本質的に異なり、擬軌道尾行性理論の新たな展開を示唆する成果である。以上の点を総合し、本研究は当初目的の50%程度を達成できたと言える。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① K. Sakai, *Shadowing chain transitive sets*, to appear in *Journal of Difference Equations and Applications* (査読有)  
DOI:10.1080/10236198.2013.767897
- ② K. Moriyasu, K. Sakai and K. Yamamoto,

*Regular maps satisfying the specification property*, *Discrete and Contin. Dynam. Syst.* 33 (2013), 2991-3009. (査読有)

DOI:10.3934/dcds.2013.33.2991

- ③ K. Sakai, *Diffeomorphisms with the  $s$ -limit shadowing property*, *Dynamical Systems: An International Journal* 27 (2012), 403-410. (査読有)

DOI:10.1080/14689367.2012.691960

[学会発表] (計4件)

- ① K. Sakai, N. Sumi and K. Yamamoto, *Measure-expansive diffeomorphisms*, *Recent Trends in Ergodic Theory & Dynamical Systems*, The Maharaja Sayajirao University of Baroda, Vadodara, Gujarat, INDIA (2012, 12, 28)
- ② K. Sakai, *Shadowing chain transitive sets*, 北京大学数学教室, 北京大学, 北京, 中国 (2011, 8, 26)
- ③ K. Sakai,  *$C^1$ -stably weakly shadowing homoclinic classes*, *Workshop on Dynamical Systems and Applied Mathematics*, Uniwersytet Jagiellonski, Krakow, Polska (2010, 10, 15)
- ④ K. Sakai,  *$C^1$ -stably weakly shadowing homoclinic classes*, *Various Aspects of Dynamical Systems*, ICM 2010 Satellite Conference, The Maharaja Sayajirao University of Baroda, Vadodara, Gujarat, INDIA (2010, 8, 31)

[図書] (計0件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計0件)
- 取得状況 (計0件)

[その他]

ホームページ等  
なし

#### 6. 研究組織

- (1) 研究代表者  
酒井 一博 (SAKAI Kazuhiro)  
宇都宮大学・教育学部・教授  
研究者番号: 30 205702
- (2) 研究分担者  
なし
- (3) 連携研究者  
なし