様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４０２２０
研究課題名（和文）作用素空間とその応用

研究課題名（英文）Operator space and Its application

研究代表者
渚　勝（Nagisa, Masaru)

千葉大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：５０１８９１７２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,700,000円、（間接経費）　810,000円

研究成果の概要（和文）：行列の理論は応用数学として有用な道具であることはよく知られている。無限次元の空間の中で扱う行列（作用素）は、有限次元では予期できない状況が発生する。作用素環論、作用素空間の理論においては、ノルムの収束、発散としてあらわれることが多いが、この研究では行列に特有な正値性に着目してその特徴を調べようとしている。作用素単調関数は、実際は行列に対する性質と考えることが可能で、行列の多くの関数計算でその正値性が保存されることが把握できた。
行列の正値性の議論は無限次元の場合でも同様に扱え、作用素空間のテンソル積での収束、発散の状況をシュアー積をキーワードとして考察し、あるテンソル積の特徴付けをえた。

研究成果の概要（英文）：It is well-known that the theory of matrices is a useful tool for the field of Applied Mathematics. We use the terminology "Operators" as Matrices in infinitely dimensional spaces. In the theory of operators, many unexpected phoenomena occur and such phoenomena do not occur in finitedimensional spaces. In the theory of Operator Algebra or Operators, such phoenomena sometimes occur in the argument in the convergence or not with respect to some norms. We study such facts using the notion of positivity. Operator monotone functions means functions which preserve the order of operators under functional caucu lus and monotonicity for matrices is equivalent to that for Operators. We can get the characterization of operator monotonicity for many functions. We also get the characterization of extended Haagerup tensor product for Operator spaces. Using the Schur product of operators, we could realize the result for operator spaces.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・解析学基礎

キーワード：作用素単調関数　Pick関数　作用素空間　Haagerupテンソル積　Schur積　作用素の正値性

１．　研究開始当初の背景

作用素環論は無限次元ヒルベルト空間上の有界線形作用素がなす環を対象とする研究である。有限次元であれば行列を対象としていることになるが、量子力学など有限次元では扱いきれない事象を含む数学的対象があったり、無限次元で扱うことによって特徴がよく見えるということも良く知られている。

無限次元の対象に挑むに際して、方針を定めずに向かうと収拾のつかないこともあるので、行列（作用素）の特徴を生かすという視点で、シュアー積、そのノルム、特殊な空間を通過する写像の合成で記述する、といういくつかの思考上のキーワードを設定する。これらは、作用素で考えられていた数域半径ノルムや、シュアー積の分解、Haagerup の写像の分解に付随するノルムなど、作用素環としての話題と作用素論の話題に共通点が感じられるような状況であった。

また、作用素環の特徴は、不変量を生み出す数学的な土俵という意味合いや、量子現象を記述する数学的な言葉を供給するという色彩を持つ。応用数学的な話題としては、量子情報理論のように、枠組みとしては本来作用素環と共通で、実際的には行列の性質、作用素論的な研究が適合する話題も注目をあび、まだまだ汲みつくされていないが、多くの関連する話題が見え隠れする状況である。

２．研究の目的

背景で述べたように、シュアー積、数域、Haagerup によるテンソル積ノルムの関わりは、先行研究によって、有限次元の関わりの中から無限次元に拡張できること得たものであり、明らかそうな内容でも関連する概念を洗い直すことで、無限次元空間の中に扱いやすそうな有限次元の構造のアナロジーが見いだせないか、無限次元の対象に有効な道具が得られないか、という視点で研究に着手している。

作用素のノルムは、自己共役作用素においては数域によって測ることができる。作用素環における行列的ノルムについても数域に関係する概念が意味を持つことを先行研究で得ている。ノルムに関する議論だけでなく数域と絡めて、作用素の性質を調べる手法の類似を、作用素環の構造を調べる方法に適用することが目的である。つまり作用素環だけでなく作用素空間を考察すること、そのテンソル積の多様性、テンソル積を特徴付ける写像の分解（古典的なバナッハ空間の手法)、シュアー積を用いた視覚化、作用素の正値性の扱い方などを関連付ける作業となる。

そのために、作用素の扱い方の手法を良く観察すること、具体的な例で眺めること、抽象論に適用可能な理論背景を見究めることが重要になると考えている。

３．研究の方法

無限次元につきまとう問題は収束しない(発散)という問題で、ノルムだけでなく、作用素の正値性と絡めながら議論を考察するというのが、基本的のアイデアである。作用素環論の中で作用素論的視点を入れることは先行研究から引き継ぐ考え方である。作用素を対象とするアプローチを作用素を含む環または線形空間に適用することになり、具体的に把握しやすい対象を眺める必要もある。これについては、テンソル積とシュアー写像としての実現が有用と考え、成果でも述べるように妥当性があったと認識している。作用素の正値性を扱う際には、個別に多くのテクニックを駆使してその性質を調べる議論が各種存在しているが、それを作用素を含む環、線形空間で展開しようとすると、多くの制限があり、細かな技術の集積にとどまる可能性がある。この研究で着目している関数の作用素単調性の議論は、1900 年代前半に関数論の分野と密接な関連を持ち発展し、関数解析学の対象として高度な理論が出来上がっている。したがって、関数論、関数解析（補間法、モーメント問題）の理論と現状の作用素不等式との関係を洗いなおす、つまり、議論の手法、仕方を整理することになる。幸い、多くの作用素不等式の議論は、この流れではない議論を用いているが、この流れの議論で再構築可能であることが、把握できている。次の成果でも触れるが、この視点だけでも作用素単調性に新たな知見が与えられることがわかってきている。

４．研究成果

抽象性の高い関数解析の成果としては、作用素空間のテンソル積の問題を扱った。作用素空間は古典的にはバナッハ空間を取り扱うことに対応するが、ヒルベルト空間上の有界線形作用素の空間に実現して取り扱うことによって、無限次元の空間のテンソル積を含む行列上のノルム構造(量子化した構造という言い方もされる）を扱うことになる。バナッハ空間においても無限次元性の影響として、そのノルムとして何種類もの重要なものが考えられ、核型のバナッハ空間は無限次元ではあるけれども典型的なノルムが一致するという良い性質などテンソル積ノルムの研究が重要であった。作用素空間のテンソル積においては、量子化されたノルム構造に着目して有用なテンソル積ノルムが研究されハーゲラップテンソル積ノルムやその拡張の研究が行われている。伊藤氏との共同研究においては、このハーゲラップテンソル積ノルムについて研究をおこなったが、一つにはこのテンソル積の元を無限次元のある種の収束性を持つ行列として見ることが可能であり、特徴的な作用素空間に対して、そのテンソル積を考察しやすい無限行列として

実現する方法を与えた。つまりテンソル積の違いをデータ的に見やすくすることができる。次に拡張されたハーゲラップ積との違いを見るために作用素空間に右コンパクト、左コンパクトの概念を導入し、どちらかのテンソル積因子の有限次元性が、拡張概念の一致と密接に関係することを得た。

また、伊藤氏とは、上の仕事においても用いた作用素論的な概念、シュアー積を作用素環論の視点から活用することを試みた。作用素環としては、環の構造つまり可換な部分環とそれに作用することによる非可換な構造を把握するのが一つの考え方になる。したがって、極大可換部分間を把握する方法としてシュアー積に関係する性質を用いる方法を考察した。行列環や無限次元の場合、Ｉ型のフォンノイマン環については、通常の積とシュアー積の関係に依って特徴付けられることを示すことができた。現在、この仕事はバナッハ環に対して同様な現象を調べるという方向で大学院生と共に進展させている。また、行列構造が絡む作用素環に同様な議論の展開が可能かどうか議論を進めている段階である。この先の進展が、従来からの視野に入れているところであるが、現状では、報告できる段階とはなっていない。この方向の議論を意識して今までの議論を行ってきており、松井氏とも多くの議論を試みている。

極大可換環など可換な部分環を調べる際には作用素の正規性、自己共役性、正値性は重要な情報を与えてくれる。量子力学や量子情報理論においては、観測可能量は自己共役作用素であり測定により実数値をある確率を持って得ることができる。作用素環の性質(テンソル積などの特徴付け) を見るときに完全正値写像は重要な概念であったが、これは量子情報理論においては通信路と把握される。通信路の性能を評価することは、この完全正値写像の関連する順序構造を調べることが密接なものとなってくる。

量子状態の距離を表す概念として Morozova-Zentkov 関数が考えられるがこの概念は Petz 氏によって作用素単調関数に付随するものであることがわかり、作用素単調を調べるという研究が発展し、Petz-Hasegawa の関数や Szabo による関数などが候補として挙げられた。前者は証明され、後者は不十分な証明で間違いも含んでいることが知られている。さて、作用素単調関数は Pick 関数と呼ばれる関数論的な概念と一致するものであるが、複素関数論的な扱いは計算が煩雑になるという認識の下、あまり積極的に扱われていなかった感がある。この方面の研究へのアプローチは、大学院生の川崎との研究から始まり、Petz-Hasegawa の関数の作用素単調性の複素関数論的な証明を与えることができた。また、複素関数論的な証明が煩雑でないことを初等的な関数論の手法で、有理作用素単調関数の決定を行った。また、この手法によって和田氏との研究で Szabo の誤りを修正し、多くの作用素単調関数を例示することができた。この成果は、口頭発表を行ったが、現在準備中である。

作用素単調関数に関する成果は、関数論的なアプローチは困難でないことを形で出せたこと、Petz-Hasegawa の関数の作用素単調性の別証明ではなくより一般形で証明できたこと、さらに Szabo が扱った関数について Szabo の議論の問題点を修正しながら証明を最後までつなげられたことなどが主要成果として挙げられる。

作用素単調関数自体で作用素に関する不等式を導くことができるが、作用素の平均という概念があり、多くの有用な不等式を導けることが知られている。この平均の概念は作用素単調関数と密接な関係を持ち、上記関数論を駆使して作用素単調性を調べることは平均を調べる上にも、大きな可能性がある。微積分で微分が増減を見るのに有用なように、作用素単調関数の微分が順序を調べるという用途にも、平均の大小関係からの復元という視点からも重要であることを示したのが内山氏との共同研究である。

内山氏との研究は作用素単調関数または作用素の平均と微分との関係であったが、関数の微分と順序の関係という視点で微積分の順序に近づく考え方を大学院生とともに研究を進め、現在、研究論文としてまとめようとしている過程である。

平均に関係する結果は、作用素値関数なので、ある意味、多変数関数であるため微分で増減を調べるという単純な議論は行えないが、だいたい微分で増減を把握しようと試みた仕事であり、ある程度その意図は実現できたと考えている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　6 件）

① 渚　勝-内山　充, Order of operators determined by operator mean, to appear in Tohoku Math. J. (査読有り)

②伊藤隆-渚 勝,On the extended Haagerup tensor product in Operator spaces, J. of Korean Math. Soc. 51(2014), 345-362. (査読有り)

③ 渚　勝,A note on rational operator monotone functions, to appear in Scientiae Math. Japon. (査読有り)

④川崎雅人-<u>渚 勝</u>, Some operator monotone functions related to Petz-Hasegawa's functions. Technical reports of Math. Sci. Chiba Univ. (2012), 1-7. (査読無し)

⑤川崎雅人-<u>渚 勝</u>, Transforms on operator monotone functions. (arXiv:1206.5452) (査読無し), 2012.

⑥<u>伊藤隆</u>-<u>渚 勝</u>, Characterization of diagonality for operators, Scientiae Math. Japon, 75(2012), 263-273.(査読有り)

〔学会発表〕（計 9 件）

①<u>渚 勝</u>-渡辺春香, 微分による作用素の順序, 日本数学会(学習院大学), 2014 年 3 月 18 日.

②<u>渚 勝</u>-和田州平, Szabo による作用素単調関数, 日本数学会(学習院大学), 2014 年 3 月 18 日.

③<u>渚 勝</u>-内山充, Order of operators determined by operator mean, 作用素論研究集会(京都大学数理解析研究所), 2013 年 11 月 8 日.

④<u>渚 勝</u>-内山 充, 作用素平均とその逆順序, 日本数学会(愛媛大学), 2013 年 9 月 27 日.

⑤<u>渚 勝</u>, 作用素単調関数について, 短期共同研究集会(京都大学数理解析研究所), 2013 年 2 月 4 日.

⑥<u>伊藤 隆</u>-<u>渚 勝</u>, Haagerup テンソル積と拡張された Haagerup テンソル積, 作用素論作用素環論研究集会(大阪教育大学), 2012 年 11 月 23 日.

⑦川崎雅人-<u>渚 勝</u>, ある作用素単調関数について, 日本数学会(九州大学), 2012 年 9 月 19 日.

⑧<u>伊藤 隆</u>-<u>渚 勝</u>, 作用素の対角性の特徴付け, 日本数学会(九州大学), 2012 年 9 月 24 日.

⑨<u>渚 勝</u>, Some operator monotone function, Kyungpook National University, Korea (招待講演) 2012 年 6 月 25 日.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~nagisa を改装中

6．研究組織

(1)研究代表者

渚 勝

千葉大学大学院理学研究科教授

研究者番号：50189172

(2)研究分担者 なし

(3)連携研究者

伊藤 隆

群馬大学教育学部教授

研究者番号： 40193495

松井 宏樹

千葉大学大学院理学研究科教授

研究者番号： 40345012