様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号： １２６０８
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2010～2014
課題番号： ２２５４０２２２

研究課題名（和文）スピン多様体上の非線形ディラック方程式の変分解析

研究課題名（英文）On a variational study of nonlinear Dirac equations on compact spin manifolds

研究代表者

磯部　健志（Isobe, Takeshi）

東京工業大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：１０２６２２５５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：幾何学や物理学に登場する、スピン多様体上定義された非線形ディラック方程式を変分法的手法を用いて研究した。得られた成果は次の通りである。1) ディラック作用素の0階の冪型の非線形摂動として得られる非線形ディラック方程式に対して、非線形項が劣臨界の場合に解の存在と多重性を証明した。2) 非線形項が臨界指数の増大度を持つ場合に、対応する変分問題の大域的コンパクト性と解の存在を証明した。3) 超対称シグマモデルの１次元版である、コンパクト多様体上のディラック・測地線の存在を、無限次元のリンク理論を用いて証明した。4) スピノル版山辺問題の解の存在を、変分法を用いて証明した。

研究成果の概要（英文）：We studied nonlinear Dirac equations on compact spin manifolds arising from geometry and physics via variational method. We obtain the following results: 1) For nonlinear Dirac equations obtained as 0-the order nonlinear perturbations of the Dirac operator, we proved the existence and multiplicity of solutions under assuming that the nonlinear term is subcritical. 2) For the case where the nonlinearity has critical growth, we prove a global compactness and the existence of solutions for the associated variational problem. 3) For the Dirac-geodesics problem (which is the 1-dimensional version of Dirac-harmonic maps), we prove the existence of solutions via infinite dimensional Linking theory. 4) For the spinorial Yamabe problem, we proved the existence of a solution via variational argument.

研究分野： 解析学、大域解析学

キーワード： 変分法　モース理論　ディラック方程式　超対称性シグマモデル　山辺問題

１．研究開始当初の背景
私は、これまでの研究で、超対称性シグマモデルの数学モデルとして近年 J. Jost 達によって導入された、ディラック・調和写像や、Ammann 達によって研究がはじめられていたスピノル版の山辺問題の解の存在とその大域的性質に興味を持ち続けていた。これらの問題に対しては、解の存在証明に向けた、一般的な解析的アプローチと呼べるようなものはなく、解の大域的な性質に関しては、全く手つかずといって良いような状態であった。これらの問題は、ともにディラック方程式の非線形版を問題に含み、このことが問題の解析を難しくしていることは明らかなことであった。
これらの問題に限らず、ディラック方程式は数学・物理学の様々な場面に登場し、双方の発展に基本的な役割を果たしてきている重要な対象である。これら幾何学や物理学の問題に端を発するディラック方程式の多くは自然な変分構造を持っており、その構造をもとに方程式の解の構造を調べることは自然である。一方、変分原理に基づくディラック方程式の研究は今まで十分になされているとは言いがたく、多くの基本的な問題が手つかずのままであった。その理由の一つは、対応する変分問題が臨界点においてモース指数無限大を持つ、いわゆる強不定値型の変分問題であり、古典的なモース理論が意味をなさないことによると思われる。従って、これらディラック方程式に対応する一般的な変分問題に対しても、それらに適用可能な適切なモース理論を確立する必要性があった。特に、ディラック・調和写像やスピノル版の山辺問題に対してモース理論を確立して、解の存在および解空間の大域的性質を解明したいと考えていた。

２．研究の目的
本研究では、変分構造を持つ、ディラック作用素の非線形摂動として与えられる非線形ディラック方程式に対して、その解の構造を変分法を用いて調べることである。
特に、幾何学・物理学に端を発する非線形ディラック方程式をモデルとして、それらに対して詳細な変分解析を実行する。具体的には、次にあげる問題を詳しく調べる。
1) スピン多様体上のディラック作用素の０階の冪型の非線形摂動として与えられる劣臨界の準線形型ディラック方程式、
2) スピン多様体上のディラック作用素の０階の非線形摂動として与えられる準線形ディラック方程式で摂動項が臨界型の場合の方程式、
3) コンパクト多様体上の超対称性シグマモデルの１次元版であるディラック・測地線、
4) 超曲面のスピノル版ワイエルストラス表現定理として登場するスピノル版山辺方程式、
のそれぞれに対して、解の存在とその大域的性質を変分法的手法によって調べる。2) に関しては対応する変分問題の大域的なコンパクト性を詳細に調べる。
最終的には、これらの問題に適用可能なモース理論をつくることを目的とする。

３．研究の方法
本研究では、ディラック・調和写像やスピノル版山辺問題を代表的な例にとって、これらの問題に対する解の存在や解空間の大域的性質を詳しく調べる。とくに、本研究の対象とする非線形ディラック方程式は自然な変分構造をもつため、その変分構造にもとづいて問題を研究する。
これらの変分問題には、解析的に、大きく分けて２つの困難が存在する。一つは、偏微分方程式の解を与える変分問題が、対応する偏微分方程式の解、すなわち変分問題の臨界点において、無限大のモース指数を持つということであり、もう一つは、対応する変分問題が Palais-Smale のコンパクト性条件を満たさないという意味で、非コンパクトであるということである。同時にこの二つの問題を取り扱うのは難しいと考えたので、研究に取りかかるにあたり、この二つの困難はとりあえず分離して、それぞれの困難から起因する部分を取り扱う為の方法および枠組みを考えることから研究をはじめた。
最初にモース指数無限大の部分だけからくる問題を考えるために、本来の問題において非コンパクト性の困難な部分を落とし簡略化した、劣臨界型のディラック作用素の０階の非線形摂動として与えられる非線形ディラック方程式を考察した。これを研究する為に、適切な関数空間の設定および変分問題のもつ無限次元のリンク構造を解明する必要があった。次に、ディラック方程式の０階の非線形摂動項を臨界型に置き換えた場合の、変分問題の大域的なコンパクト性を研究した。
ディラック・調和写像を考察するにあたっては、コンパクト性の問題を回避する為に、１次元版の問題であるディラック・測地線の考察にとどめた。この問題を変分法的に取り扱うために、適切な関数空間の設定とその無限次元多様体としての構造、および変分問題のリンク構造を詳しく調べた。
スピノル版の山辺問題を考察するに際しては、ポテンシャル関数が定数の場合には、球面上における解の性質は Ammann によってある程度わかっていたので、その解の摂動として得られるような解をみつけようと思い、ポテンシャル関数が十分定数に近い場合を考察した。方法としては、ポテンシャル関数が定数の場合の良く知られている解空間上の有限次元変分問題に問題を簡約して、簡約された変分問題にモース・ボット理論と Conley 指数理論を応用して調べた。
以上は主に変分問題のリンク構造にもとづく解の存在に関する研究であるが、解の大域

的性質を調べる為はモース理論を確立する必要がある。ディラック方程式の場合、対応する変分問題が臨界点においてモース指数無限大をとるため、正規化されたモース理論であるモース・フレアー理論をつくる必要がある。そのために、適切なモース指数の定義から始めて、モース指数と臨界点のコンパクト性の関係、勾配流の軌道空間の性質（コンパクト性および横断正則性）を詳細に調べる。

４．研究成果

本研究期間で得られた研究成果は次の通りである。

1) ディラック作用素の０階の冪型の非線形摂動で与えられるディラック方程式に対して、非線形項が優２次かつ劣臨界、および劣２次、それぞれの場合に解の存在を証明した。また、非線形項が偶関数の場合に解は無限個存在することを証明した。

2) ディラック作用素の０階の摂動項が、ソボレフの埋め込みに関して臨界指数の場合に、対応する臨界型の汎関数の大域的コンパクト性を証明した。また、臨界型非線形項に線形の摂動を加えた方程式に対して、対応する変分問題の Legendre-Fenchel 双対汎函数に対して峠構造を調べることで、解の存在定理を証明した。

3)摂動されたディラック・測地線汎関数に対して、多様体の曲率が非正かつ摂動項が３次あるいは優３次（多様体が平坦な場合は優２次）の場合に非自明なディラック・測地線の存在を証明した。また多様体の曲率に条件をおかない場合、リーマン計量が「一般的」という条件のもとで、摂動項が３次あるいは優３次で適当な意味で「大きい」場合、非自明なディラック・測地線が存在することを証明した。

4) 多様体にはめこまれた超曲面の表現として登場する、スピノル版ワイエルストラス定理に関連したスピノル版山辺方程式を研究した。これはディラック方程式の０階の非線形摂動として与えられる方程式であるが、その摂動項はソボレフの埋め込みに関して臨界指数を持つ方程式である。この方程式に関して、ポテンシャル関数が定数に十分近い場合に、ポテンシャル関数の「指数数え上げ条件」の下で解の存在を証明した。証明はまず問題を有限次元の変分問題に簡約することから始まり、次に簡約された有限次元の問題に対して、適切なモース・ボット理論を展開することにより実行される。この存在定理の応用として、３次元ユークリッド空間への、与えられた関数を平均曲率として持つ、２次元球面の共形はめ込みの存在定理を、関数に関する「指数数え上げ条件」のもと証明した。

3) ３次元のスピノル版山辺方程式に関連して、対応する変分問題に Conley 指数理論を応用することで、解の存在定理を導いた。その応用として、ある種の４次元多様体におけるアインシュタイン方程式の初期値問題の存在定理が従う。

4) ディラック作用素の０階の非線形摂動として与えられる非線形ディラック方程式に対して、非線形項が劣臨界かつ優２次の場合に、相対モース指数の有界性と臨界点のコンパクト性の同値性を証明した。

5) ディラック作用素の０階の非線形摂動として与えられる非線形ディラック方程式に対して、非線形項が劣臨界かつ優２次の場合にモース・フレアー型のホモロジーを構成した。更に、ホモロジーの消滅定理を証明した。その応用して、リンク理論を用いて証明していた、優２次の非線形ディラック方程式の解の存在定理の拡張と別証明を与えた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

1. <u>Takeshi Isobe</u>: Existence results for solutions to nonlinear Dirac equations on compact spin manifolds. Manuscripta Math. 135.3-4, 329-360 (2011) （査読あり）

2. <u>Takeshi Isobe:</u> Nonlinear Dirac equations with critical nonlinearities on compact spin manifolds. J. Funct. Anal. 260.1, 253-307 (2011) （査読あり）

3. <u>Takeshi Isobe</u>: On the existence of nonlinear Dirac geodesics on compact manifolds. Calculus of variations and PDE. 43.1-2, 83-121. （査読あり）

4. <u>Takeshi Isobe</u>: A perturbation method for spinorial Yamebe type equations on S^m and its application. Math. Ann. 355.4, 1255-1299 (2013) （査読あり）

5. <u>Takeshi Isobe</u>: On superquadratic Dirac equations on compact spin manifolds (Geometry of solutions of partial differential equations). 数理解析研究所講究録 1896 79-97 (2014). （査読なし）

6. <u>Takeshi Isobe</u>: Spinorial Yamebe type equations on S^3 via Conley index. Adv. Nonlinear Studies. 15.1, 39-60 (2015) （査読あり）

〔学会発表〕（計 1 件）

1. <u>Takeshi Isobe</u>: 「On superquadratic Dirac equations o compact spin manifolds」RIMS 研究集会「偏微分方程式の解の幾何」京都大学数理解析研究所 ２０１３年１１月２０日～１１月２２日

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
磯部　健志（Isobe, Takeshi）
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授
　研究者番号：10262255

(2)研究分担者
　　　　　　　(　　　)

　研究者番号：

(3)連携研究者
　　　　　　　(　　　)

　研究者番号：