

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月22日現在

機関番号：14302

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540226

研究課題名（和文）非横断的交差を含むヘテロ次元サイクルのロバスト性に関する研究

研究課題名（英文） $C^2$  robust heterodimensional tangencies on heterodimensional cycles

研究代表者

桐木 紳 (KIRIKI SHIN)

京都教育大学・教育学部・教授

(2013年3月まで、2013年4月より東海大学・理学部・教授)

研究者番号：50277232

研究成果の概要（和文）：微分同相写像が接触を含むようなヘテロ次元サイクルをもつような非双曲的状況の力学的性質について研究を行った。特筆すべき成果は、

(1) 接触の崩壊に伴いストレンジ・アトラクタが発生することを示し、

(2)  $C^2$  Newhouse 現象が発生することも示した。(3) さらに接触を含むヘテロ次元サイクルを持つような微分同相写像の  $C^2$  ロバスト性を示すことに成功した。

研究成果の概要（英文）：We study diffeomorphisms having heterodimensional cycles containing a heterodimensional tangency. The main results of this study are the following:

(1) Arbitrarily close such a situation, we show existence of diffeomorphisms which have strange attractors,

(2) and detect an open set of diffeomorphisms having  $C^2$  Newhouse phenomenon.(3) Moreover, we show that such a critical cycle is robust in the  $C^2$  topology.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：力学系

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非双曲性，ヘテロ次元サイクル，ホモクリニック分岐

### 1. 研究開始当初の背景

学術的背景も含め研究開始当初の状況を述べる。S. Smale と J. Palis が力学系の研究において提唱したプログラムは、双曲性という概念を土台に通有的な力学系の振る舞いを幾何学的に記述することであった。

そのプログラムに沿って、20世紀中に双曲的、特に構造安定な力学系の本質的なことは全て解明され、現在の主流は非双曲的な力学

系の研究である。その非双曲型力学系のキーワードは、2次元以上で起こりうる

- ホモクリニック接触と3次元以上で起こりうる
- ヘテロ次元サイクル

である。これらは Palis 予想の重要な部分をなしている（この予想は、 $C^1$ 級の2次元微分同相写像に関して Pujals-Sambarino (2000) によって肯定的に証明が成されたが、より高

い微分可能性や次元においては未解決である)。

**Smale-Palais** プログラムの重要なステップは、力学系が有するロバスト(robust)な性質、すなわち、ある性質が力学系なす空間内で通有的に成り立っているか解明することである。これは、構造安定といった性質が期待できない非双曲的力学系の構造に何らかの共通性を見いだすために導入された概念である。実際、構造不安定な力学系であってもホモクリニック接触による非双曲的性質をロバストに持つことが **Newhouse (1979)** によって明らかにされている。

本研究では (ホモクリニック的な) 接触に加え3次元以上の力学系で起こる非双曲的現象である接触を含むヘテロ次元サイクルのロバスト性を明らかにすることであった。

## 2. 研究の目的

研究の目的を説明するために、いくつかの概念を導入する。

双曲的不変集合のインデックスとは、その不安定束の次元数のことである。微分同相写像  $f$  が2つのサドル型の双曲的不変集合  $\Lambda$  と  $\Sigma$  に関してヘテロ次元サイクルをもつとは、 $\Lambda$  と  $\Sigma$  のインデックスが相異なり、それら安定多様体と不安定多様体がそれぞれ交わりをもち、サイクルをなすことである。例えば3次元の場合、双曲的集合  $\Lambda$  がインデックス1のサドル不動点  $P$  で、 $\Sigma$  がインデックス2のサドル不動点  $Q$  ならば、それらに対するヘテロ次元サイクルは次の図1のようになる。

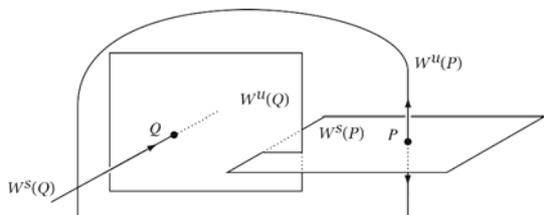


図 1

このようなサイクルに沿った不変集合は、インデックスが異なる不動点  $P$  と  $Q$  のいくらかでも近くを通るので、一様に双曲的な構造をとることはできないので非双曲的である。

非双曲的な系が一般的であるかどうかは、その構造が摂動に耐えうるかどうかである。 $W^s(P)$  と  $W^u(Q)$  は横断的なので少々の摂動によってその関係が失われることはない。一方、 $W^s(Q)$  と  $W^u(P)$  の交差は横断的でなく (擬横断的)、微小な摂動によって簡単にその交差は失われてしまう。では、このようなサイクルは特殊なものなのであろうか? この疑問に対して、これに対して **Bonatti & Díaz** は、このような状況がロバストであることを示した。

ここでヘテロ次元サイクルが  $C^1$  ロバストであるとは、ヘテロ次元サイクルをもつ微分同相写像  $f$  を  $C^1$  で摂動しても、やはりヘテロ次元サイクルが存在し続けることである。すなわち上の結果はヘテロ次元サイクルが  $C^1$  位相では一般的なものであること示している。本研究では、このような  $C^1$  ロバストなヘテロ次元サイクルのより詳しい分析を行う。そのためにまずヘテロ次元サイクルに沿った不変集合の弱い意味での双曲性 (partial hyperbolicity) に着目し、それが壊れる分岐現象を調べる。Bonatti & Díaz は先の3次元の例で仮定したように  $W^s(P)$  と  $W^u(Q)$  の間の交わりは横断的であるものに着目した。本研究では、この仮定を弱め  $W^s(P)$  と  $W^u(Q)$  の交差を横断的なものから非横断的に変えた状況を考察し、それに伴う分岐現象などを明らかにすることが目的であった。

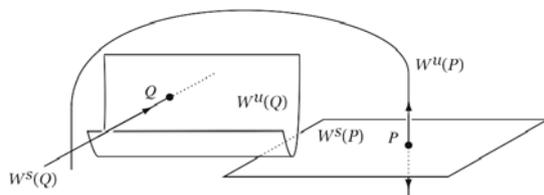


図 2

## 3. 研究の方法

研究代表者と研究分担者の所属大学が異なるため、2~3ヶ月に1度くらいどちらかの所属大学に出張し研究打ち合わせ並びに議論を重ねながら研究を進めた。主に研究代表者が証明案を提示し、研究分担者と共により完成度の高いものにしていくという手法で証明を完成させた。論文の執筆は研究代表者が行い研究分担者が推敲を行うスタイルが多かった。

研究成果は国内外の力学系研究集会でそ発表を行い、最終的には論文として5篇の論文を出版した。

また、Lorenzo J. Díaz 氏 (Pac-Rio) や篠原克寿氏 (東大) から情報提供や意見をもらった。

## 4. 研究成果

この研究に関して5篇の論文を出版した。このうち主な成果について、その概要を説明する。

まず次の論文について説明する。

- Ch. Bonatti, L.J. Díaz and S. Kiriki, Stabilization of heterodimensional cycles, *Nonlinearity* 25-4 (2012) 931-960, doi: 10.1088/0951-7715/25/4/931

これは Ch. Bonatti と L.J. Díaz の共同研究

であるが、本研究とたいへん深いつながりがある内容である。この論文では図1のような横断的交差と擬横断交差からなるヘテロ次元サイクルのロバスト性を扱っている。このような系に摂動を加えればオリジナルのサイクルの擬横断交差がすぐに壊れてしまう。しかし、このサイクルのつながり方によっては、同様なサイクルもつ写像の開集合が  $C^1$  近傍に存在することを明らかにした。すなわち  $C^1$  カテゴリーの非双曲的力学系において、このようなサイクルは一般的なものであることが明らかになった。

次に本研究の主要結果をまとめた次の2篇について述べる。

- **S. Kiriki and T. Soma**,  $C^2$ -robust heterodimensional tangencies (with T. Soma), *Nonlinearity* 25-12 (2012) 3277–3299, doi :10.1088/0951-7715/25/12/3277
- **S. Kiriki, Y. Nishizawa and T. Soma** Heterodimensional tangencies on cycles leading to strange attractors, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **27-1** (2010) 285–300 doi: 10.3934/dcds.2010.27.285

これらの論文では先の Ch. Bonatti と L. J. Díaz の共著論文で扱ったヘテロ次元サイクルよりもクリティカルな状況、すなわちヘテロ次元接触と擬横断交差からなるヘテロ次元サイクルのロバスト性を研究した。3次元空間での力学系のヘテロ次元接触を考える場合、安定多様体と不安定多様体の次元が同じである。しかし、4次元以上の場合にはヘテロ次元接触を起こす安定多様体と不安定多様体の次元が異なる場合も考えられる。状況を簡単にするために4次元以上でもヘテロ次元接触を起こす安定多様体と不安定多様体の次元が同じである場合に制限して研究を進めた。

ヘテロ次元接触にはモースインデックスの違いによって図3のように2通りの場合が考えられる。

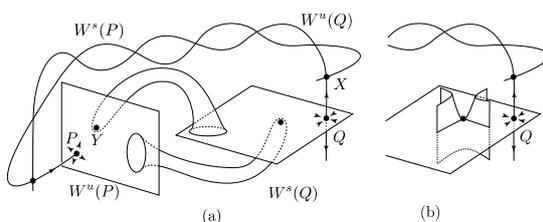


図3

このようなサイクルは摂動によって接触と擬横断交差がすぐに壊れてしまう。我々はこのような写像の  $C^2$  近傍にやはり接触と擬

横断交差からなるヘテロ次元サイクルをもつ写像の開集合が存在する状況を見出した。つまりこのようなクリティカルな状況は  $C^2$  位相で一般的なものであることを示すことに成功したわけである。また、このようなサイクルの分岐においてストレンジ・アトラクタの存在を確認し、さらに無限個の沈点や源点が発生する現象 (Newhouse 現象) が起こることを確認した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① **S. Kiriki and T. Soma**,  $C^2$ -robust heterodimensional tangencies (with T. Soma), *Nonlinearity* 25-12 (2012) 3277–3299, doi : 10.1088/0951-7715/25/12/3277
- ② **S. Kiriki and T. Soma**, Existence of generic cubic homoclinic tangencies for Hénon maps, (with T. Soma), *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (2012), doi:10.1017/S0143385712000168
- ③ Ch. Bonatti, L.J. Díaz and **S. Kiriki**, Stabilization of heterodimensional cycles, *Nonlinearity* 25-4 (2012) 931-960, doi:10.1088/0951-7715/25/4/931
- ④ **S. Kiriki, Y. Nishizawa and T. Soma** Heterodimensional tangencies on cycles leading to strange attractors, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **27-1** (2010) 285-300 doi:10.3934/dcds.2010.27.285
- ⑤ **S. Kiriki, M.-C. Li and T. Soma** Coexistence of homoclinic sets with and without SRB measures in Hénon family, *Nonlinearity* **23-9** (2010) 2253-2269 doi:10.1088/0951-7715/23/9/010

[学会発表] (計7件)

- ① 2013, 3/22 日本数学会 トポロジー分科会 (京都大学) 講演 「 $C^2$ -robust heterodimensional tangencies」
- ② 2012, 9/21 日本数学会 トポロジー分科会 (九州大学) 講演 「Existence of generic cubic homoclinic tangencies for Hénon maps」
- ③ 5/30-6/8 ICTP-ESF-School and Conference in Dynamical Systems (イタリア・トリエステ) 講演 「 $C^2$ -robust heterodimensional tangencies」

- ④ 2012, 1/10 冬の力学系研究集会(日本大学軽井沢研修所)講演「 $C^2$ -robust heterodimensional tangencies」
- ⑤ 2011, 11/18 京都力学系セミナー(京都大学)講演「 $C^2$ -robust heterodimensional tangencies」
- ⑥ 2011, 7/4-7/6 Symposium on Ergodic Theory and Dynamical Systems, Piece-wise and Low-Dimensional Dynamics (英国, Warwick 大), 招待講演「Renormalized Dynamics near Heterodimensional Tangencies and Existence of Robust Cycles」
- ⑦ 2011, 5/12-5/14 2011 NCTS Workshop on Dynamical Systems(台湾, 清華大), 招待講演「Renormalized Dynamics near Heterodimensional Tangencies and Existence of Robust Cycles」

[その他]

ホームページ等

<http://sm.u-tokai.ac.jp/~skiriki>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

桐木 紳 (KIRIKI SHIN)

京都教育大学・教育学部・教授

(2013年4月より東海大学・理学部・教授)

研究者番号：50277232

### (2) 研究分担者

相馬 輝彦 (SOMA TERHIKO)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：50154688

以上