

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 14 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540228

研究課題名（和文）新しいタイプの非線形分散波動方程式の初期値問題に関する研究

研究課題名（英文）Study on the initial value problems for a new type of nonlinear dispersive wave equations

研究代表者

松野 好雅 (MATSUNO YOSHIMASA)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：30190490

研究成果の概要（和文）：新しいタイプの非線形分散波動方程式の厳密解や解の性質に関する幾つかの新たな成果を得た。具体的には、ジョセフソン接合の非局所的電気力学を記述するモデル方程式、一般化された sine-Gordon 方程式、Fokas-Lenells の微分型非線形 Schrödinger 方程式、多成分短パルス方程式、多成分微分型非線形 Schrödinger 方程式、変形 Camassa-Holm 方程式等について研究し、これら方程式の多重ソリトン解を構成、さらにその性質を調べた。

研究成果の概要（英文）：

We have obtained some new results for exact solutions and their properties of a new type of nonlinear dispersive wave equations. In particular, we have studied a model equation describing nonlocal Josephson electrodynamics, generalized sine-Gordon equation, derivative nonlinear Schrödinger equation of Fokas-Lenells type, multi-component short pulses equation, multi-component derivative nonlinear Schrödinger equation and modified Camassa-Holm equation. We have constructed multisoliton solutions of these equations and then investigated their properties.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、大域解析学

キーワード：非線形分散波動方程式、厳密解法、ソリトン、漸近解析、初期値問題

1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形分散波動方程式は、物理学や工学で見られる種々の現象をモデル化したものが多く、その典型例は浅い水の波の伝播を

記述する Korteweg-de Vries 方程式や波の変調現象を記述する非線形 Schrödinger 方程式である。これらの方程式の厳密解法に関しては、20 世紀の半ば過ぎ頃から逆散乱法、

ベックルンド変換法、広田の直接法、佐藤理論等が開発され、非線形解析学の新分野として発展してきた。

(2) 一次元の局所的ソリトン方程式で開発された研究手法の多くは、非局所的ソリトン方程式、多成分ソリトン方程式、多次元ソリトン方程式の解析に応用できるが、新たな解析手法を必要とする未解決問題も多数残されている。

2. 研究の目的

Benjamin-Ono 方程式を代表とする積分項を有する非局所的な発展方程式（非線形分散波動方程式）の初期値問題の本格的な研究は最近に就いたところである。また Camassa-Holm 方程式や Degasperis-Procesi 方程式、一般化された sine-Gordon 方程式等、局所的でありながらその構造は従来のソリトン方程式とは全く異なる方程式の研究も最近の重要な研究課題のひとつである。さらに、多成分ソリトン方程式は 1 成分系とは異なる新たな解析手法を必要とする。本研究では上述したような新しいタイプの非線形分散波動方程式に関して、厳密解の構成、初期値問題の定式化、及び解の漸近解析に焦点を絞って研究を行う。

3. 研究の方法

ソリトン方程式の理論で開発された解析手法、とりわけ逆散乱法や、広田の直接法を駆使し、厳密解を構成する。さらに解の長時間での振る舞いや、零分散極限に関する研究を行う。

4. 研究成果

(1) ジョセフソン接合の電気力学を記述するモデル方程式：この方程式は非局所的な積分核を散逸項とするユニークな非線形方程式であるが、これの周期解を構成し、解の性質を議論した。また、解の長波長極限についても検討した。

(2) 一般化された sine-Gordon 方程式：これは最近提案された可積分方程式であり、逆散乱法による定式化はなされておらず、具体的な解についても知られていなかった。ここでは一連の非線形変換によりこの方程式を双一次方程式に変換し、これの多重ソリトン解を構成した。特に興味のあるブリーザー解についてはその性質を詳細に調べ、新たな知見を得た。

(3) 多成分短パルス方程式：光ファイバー中の非線形波動（ソリトン）の伝播特性は非線形 Schrödinger 方程式で記述できるが、極めて短い波動の伝播においては左記方程式の導出の前提である緩慢変化包絡線近似が成立しない。これに代わる方程式のひとつとして短パルス方程式が提案された。この方

程式は直線偏光の電場の変化を記述するが、円偏光や楕円偏光等のより現実的な場合を扱うには多成分化が必要である。本研究では可積分な多成分短パルス方程式を提案し、直接法を用いて多重ソリトン解のパラメータ表示を得た。非線形 Schrödinger 方程式の場合と異なり、解の構成要素は行列式ではなくパフィアンで表示されるという著しい結果を得た。

(4) 多成分微分型非線形 Schrödinger 方程式：宇宙空間中の非線形アルフベン波や、単一モード光ファイバー中のパルス伝播を記述する微分型非線形 Schrödinger 方程式の研究に関してはこれまで多くの成果が得られている。この方程式の多成分化については最近の重要な研究課題となっている。本研究においては任意成分を有する微分型非線形 Schrödinger 方程式の可積分な一般化を行った。1 成分の場合と比較して、解の構成は複雑であるが、直接法を用いて行列式による多重ソリトン解の表示を得た。

(5) Fokas-Lenells の微分型非線形 Schrödinger 方程式 I：上記方程式は光ファイバー中のパルス伝播を記述するモデル方程式である。非線形 Schrödinger 方程式同様に可積分方程式であり、最近精力的に研究が行われている。ここでは行列式の理論に基づく純代数的手法により、無限遠方で零となる境界条件を満たす多重ソリトン解（いわゆるブライツソリトン解）を得た。具体的には行列式の比として表せる 2 種類の解の表示を導き、その性質を議論した。とりわけ解の時間無限大での漸近性質を調べ、ソリトンの衝突による位相のずれの公式を導いた。ソリトン解の証明は行列式の基本的性質、特に Jacobi の恒等式のみを用いた簡明なものである。

(6) Fokas-Lenells の微分型非線形 Schrödinger 方程式 II：I に続き左記方程式のダークソリトン解を構成した。これは無限遠方で零とならない境界条件を満たすソリトン解であり、ブライツソリトン解の場合と異なり、その構成法は非常に複雑である。それゆえ新たな解析手法の開発が必要となった。具体的には、解の基本的構成要素であるタウ関数の間の 3 次の恒等式が重要な役割を演じた。特に興味のある解の性質としては、一定の背景下におけるブライツソリトンとダークソリトンの共存である。これに関して詳細な解析を行った。さらに解の漸近解析も行い、位相のずれの公式を得た。本研究において用いた解析手法は、種々の非線形分散波動方程式（多成分型を含む）のダークソリトン解の構成に応用できるものと期待される。

(7) 3 次の非線形項を有する変形 Camassa-Holm 方程式：左記方程式は 2 次の非線形項を有する Camassa-Holm 方程式とは異

なる新奇な構造を持っている。ここではホドグラフ変換によりこれをより扱い易い形に変換し、これを用いて多重ソリトン解を構成した。解はパラメータ表示で書けるが、それを特徴づけるタウ関数は Ablowitz 達により提案された浅い水の波のモデル方程式の多重ソリトン解の対応するタウ関数と一致するという著しい結果を得た。解は滑らかな関数で表されるソリトン解とともに多価関数となる特異なものも存在することを示した。さらに解の時間無限大での漸近解析を行い、ソリトンの位相のずれに対する公式を導いた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① Yoshimasa Matsuno、 Bäcklund transformation and smooth multisoliton solutions of a modified Camassa-Holm equation with cubic nonlinearity, Journal of Mathematical Physics、査読有、Vol. 54、issue 6、2013
掲載決定
URL:<http://jmp.aip.org>
- ② B. Ponnusamy H. Yamamoto and H. Yanagihara、Variability regions for certain families of harmonic univalent mappings, Complex Variables and Elliptic Equations、査読有、Vol. 58、2013、pp. 23-34
DOI:10.1080/17476933.2010.551200
- ③ Yoshimasa Matsuno、A direct method of solution for the Fokas-Lenells derivative nonlinear Schrödinger equation: II. dark soliton solutions、Journal of Physics A: Math. Theor.、査読有、Vol. 45、2012、475202(31pp)
DOI:10.1088/1751-8113/45/47/475202
- ④ Yoshimasa Matsuno、A direct method of solution for the Fokas-Lenells derivative nonlinear Schrödinger equation: I. bright soliton solutions、Journal of Physics A: Math. Theor.、査読有、Vol. 45、2012、235202(19pp)
DOI:10.1088/1751-8113/45/23/235202
- ⑤ 松野 好雅、多成分変形非線形シュレーインガー方程式の多重ソリトン解、数理解析研究所講究録、査読無、1800 巻、2012、pp. 130-144
URL:<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp>
- ⑥ 松野 好雅、振動と波動、数理解析研究所講究録、査読無、50 巻、2012、pp. 15-21
URL:<http://www.saiensu.co.jp>
- ⑦ Makoto Masumoto、 Conformal and holomorphic mappings of once-holed tori、Global Journal of Mathematical Sciences、査読有、Vol. 1、2012、pp. 24-30
RL:<http://www.globaljournalseries.com>
- ⑧ Yoshimasa Matsuno、A novel multi-component generalization of the short pulse equation and its multisoliton solutions、Journal of Mathematical Physics、査読有、Vol. 52、2011、123702(22pp)
DOI:10.1063/1.3664904
- ⑨ Yoshimasa Matsuno、The bright N-soliton solution of a multi-component modified nonlinear Schrödinger equation、Journal of Physics A: Math. Theor.、査読有、Vol. 44、2011、495202(18pp)
DOI:10.1088/1751-8113/44/49/495202
- ⑩ Yoshimasa Matsuno、The N-soliton solution of a two-component modified nonlinear Schrödinger equation、Physics Letters A、査読有、Vol. 375、2011、pp. 3090-3094
DOI:10.1016/j.physleta.2011.06.066
- ⑪ 松野 好雅、一般化された sine-Gordon 方程式の厳密解法、数理解析研究所講究録、査読無、1761 巻、2011、pp. 80-99
URL:<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp>
- ⑫ Makoto Masumoto、Corrections and complements to “Once-holed tori embedded in Riemann surfaces”、Mathematische Zeitschrift、査読有、Vol. 267、2011、pp. 869-874
DOI:10.1007/s00209-009-0650-4
- ⑬ 松野 好雅、ジョセフソン接合の電気力学を記述するモデル方程式の周期解、数理解析研究所講究録、査読無、1701 巻、2010、pp. 25-34
URL:<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp>
- ⑭ Yoshimasa Matsuno、A direct method for solving the generalized sine-Gordon equation II、Journal of Physics A: Math. Theor.、査読有、Vol. 43、2010、375201(24pp)
DOI:10.1088/1751-8113/43/37/375201

[学会発表] (計 14 件)

- ① 牧野 哲、気体星の球対称運動、「日本数学会年会」、2013年3月23日、京都大学(京都市)
- ② Makoto Masumoto、Conformal and holomorphic mappings of once-holed tori、「Perspects of theory of Riemann surfaces」、2012年12月15日～16日(連続講演)、山口大学(山口市)
- ③ Tetu Makino、Gaseous free boundary touching vacuum and Nash-Moser theory、「2012 International Conference on

- Nonlinear Analysis」、2012年10月31日、Academia Sinica (タイペイ、台湾)
- ④ 松野 好雅、Fokas-Lenells の微分型非線形シュレーディンガー方程式の直接解法、数理解析研究所研究集会「非線形波動の数理、モデリングおよび応用」、2012年10月19日、京都大学(京都市)
 - ⑤ 牧野 哲、重力下の気体の1次元運動への Nash-Moser 理論の応用、「日本数学会秋季総合分科会」、2012年9月21日、九州大学(福岡市)
 - ⑥ Makoto Masumoto、Handle conditions and basic external lengths of marked once-holed tori、「The Sixth World Conference of Nonlinear Analysts」、2012年6月25日、University of Athens (アテネ、ギリシャ)
 - ⑦ 松野 好雅、多成分短パルス方程式と多重ソリトン解、「日本物理学会」、2012年3月24日、関西学院大学(西宮市)
 - ⑧ 増本 誠、リーマン面の接続と射影構造、「リーマン面の展望」、2011年12月21日、山口大学(山口市)
 - ⑨ 増本 誠、種数有限な開リーマン面のコンパクト接続のなす空間、「等角写像論・値分布論研究集会」、2011年12月4日、金沢大学(金沢市)
 - ⑩ 松野 好雅、多成分変形非線形シュレーディンガー方程式の多重ソリトン解、数理解析研究所研究集会「非線形波動の研究の新たな進展」、2011年10月13日、京都大学(京都市)
 - ⑪ Makoto Masumoto、Measuring the sizes of handles of Riemann surfaces、「The 13th Conference on Real and Complex Analysis in Hiroshima」、2010年12月20日、広島大学(東広島市)
 - ⑫ Makoto Masumoto、Once-holed tori embedded in Riemann surfaces、「The 1st International Conference on Mathematics and its Applications」、2010年10月15日、東国大学校(慶州、大韓民国)
 - ⑬ 松野 好雅、一般化された sine-Gordon 方程式の厳密解法、数理解析研究所研究集会「非線形波動現象の多様性と普遍性」、2010年10月14日、京都大学(京都市)
 - ⑭ Makoto Masumoto、Once-holed tori embedded in Riemann surfaces、「Methods of Modern Mathematical analysis and Applications」、2010年8月31日、Hanoi University of Science (ハノイ、ベトナム)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松野 好雅 (MATSUNO YOSHIMASA)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：30190490

(2) 研究分担者

牧野 哲 (MAKINO TETU)
山口大学・大学院・理工学研究科・教授
研究者番号：00131376

増本 誠 (MASUMOTO MAKOTO)
山口大学・大学院・理工学研究科・教授
研究者番号：50173761

柳 研二郎 (YANAGI KENJIRO)
山口大学・大学院・理工学研究科・教授
研究者番号：90108267

岡田 真理 (OKADA MARI)
山口大学・大学院・理工学研究科・准教授
研究者番号：40201389

柳原 宏 (YANAGIHARA HIROSHI)
山口大学・大学院・理工学研究科・准教授
研究者番号：30200538

(3) 連携研究者

なし ()
研究者番号：