様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25　年　5　月　4　日現在

機関番号：16102
研究種目：基盤研究　（C）
研究期間：2010～2012
課題番号：22540229
研究課題名（和文）準線形楕円型方程式に対する自由境界問題

研究課題名（英文）Free boundary problem with quasilinear elliptic equations

研究代表者
成川　公昭　（NARUKAWA KIMIAKI）
鳴門教育大学・大学院学校教育研究科・教授
研究者番号：60116639

研究成果の概要（和文）：非線形弾性体の方程式や非ニュートン流等に現れる非同次な主要部を持つ準線形楕円型方程式に対する自由境界問題の解析を目的として研究を行った。特に，外力項が臨界増大度を有し，現れる係数が不定符号である問題に注目し，まず自由境界問題の詳細な解析に必要とされるディリクレ境界値問題および非線形ノイマン問題の正値解に対するいくつかの性質について解明した。更に，それらの結果を駆使することにより，自由境界の現れる変分問題に対する研究を試みた。

研究成果の概要（英文）：We have investigated free boundary problems with quasilinear elliptic equations having nonhomogeneous principal parts, which appear often in the field of nonlinear elasticity, and non-Newtonian fluid etc. Especially the properties of positive solutions for Dirichlet and nonlinear Neumann problems for the equations with critical nonlinear terms and indefinite coefficients have been studied. These results are necessary to investigate the free boundary problem with quasilinear elliptic equations. Using these results, we challenged the variational problems appearing free boundaries.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１１年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１２年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学，大域解析学
キーワード：変分法，準線形楕円型方程式，自由境界問題，臨界指数，ディリクレ境界値問題，非線形ノイマン問題

１．研究開始当初の背景

（１）退化型準線形楕円型微分方程式に対し，主要部が p-ラプラシアン（同次の場合）に対する研究はある程度十分になされていたが，非同次の主要部を持つ方程式については劣臨界な外力項を持つ場合に，局所的な結果が一部得られていたのみである。大域的な結果については，p-ラプラシアンの場合でも未だ残された問題があり，更に，その係数が不定符号の場合には p-ラプラシアンの時にも十分な結果が得られていなかった。

（２）非線形ノイマン問題については，自由境界が現れないものに対しても，局所的な研

究は詳しくなされてきていたが，不定符号の係数をもつ臨界増大度についての大域的な問題は未だ残されていた。

（３）自由境界が現れる現象は，流体の界面，熱流，電気化学現象等，自然界の様々な場面で観察することができる。一方，その方程式は，媒体の一様性がない場合が一般的であり，非同次な準線形のみならず，多くの場合退化型となる。自由境界を伴う問題は，Alt-Caffarelli が最初に変分問題として捉え，ラプラシアンの場合にその解析を行った。その後，非退化型の楕円型方程式について研究がなされ ，更に引き続き，退化型についても Danielli，Petrosyan 等により解析が行われ始めた。しかし，対象はいずれも p-ラプラシアン，すなわち，同次型の方程式に限るものであった。また，外力項に対しては存在しない場合や与えられた関数の場合が取り扱われているに過ぎなかった。

２．研究の目的

（１）非同次な主要部を持つ退化型準線形方程式に対するディクレ問題を考え，外力項の振る舞いと主要部の増大度を比較することにより，解の振る舞いが大域的にどのように変わるのかを解析する。特に，正値解の分岐構造が，それに応じて如何に変化するのか詳しく調べる。また，外力項の係数が不定符号の場合，定符号と変わらぬ結果を得るための条件について解明する。

（２）非同次な主要部を持つ非線形ノイマン問題についてディリクレ問題と同様に正値解の構造について明らかにする。主要部に対し，臨界増大度を持つ境界値問題や，方程式の外力に臨界増大部分が現れるとき，特に境界に於いて爆発点が現れる場合がある。この様子を明らかにすることにより，大域的な結果を得る。

（３）ディリクレ問題，非線形ノイマン問題で得られた解の情報をもとに，非同次な退化型方程式に対する自由境界問題について解析を行う。目的は，非退化な準線形方程式や，同次な方程式について得られている自由境界に対する結果を，非同次退化型方程式に拡張することである。更には，外力項が臨界型の場合や不定符号を持つ場合にも，どのような条件があれば，既に得られている外力項が劣臨界増大度や定符号係数の場合と同じ結果が成り立つのかその条件を求める。

３．研究の方法

（１）研究課題を達成するための数学的方法は基本的に変分法に基づくものであるが，異なった視点から多角的に問題を捉え直し，従来の方法では解決できない課題を克服する必要があった。そのため，まず，連携研究者と解決するべき問題を明確にし，それぞれの得意とする分野を分担し研究を進めた後，その結果を再度集まり共有することとした。お互いに解決された点と問題点を確認し，その立場に立って，次に解決しなければならない問題を整理し明確にした上で，再度それぞれが新たな分担を引き受け，研究を進めるという手順により研究を進めた。具体的には，毎週１回程度，研究代表者と連携研究者が一カ所に寄り集まり，セミナーを通してそれぞれの研究結果の共有を行った。

（２）この研究課題は多くの分野と関わっており，またその周辺の研究の最近の進展は予想していた以上に著しいものであった。従って，それら最新の情報を得るため，その研究内容が関係する，各地で開催される研究集会や学会講演に出席し，新たな手法の獲得を目指した。同時に，得られた研究成果は国際会議をはじめとした幾つかの研究集会で発表を行い，その評価を問うとともに新たな進展の道を探った。

（３）本研究課題は，物理的な観点から見て非常に歴史的な問題であり，多くの物理現象を記述するものである。また，古く幾何学において提言された問題とも関わっている。課題自身の歴史的位置づけや，取り組んでいることの物理的，数学的意味を再確認し，目指している研究の方向を明確にするためにも，多くの関連する論文や書籍を手元に取り寄せ一つ一つ確認の上研究を進めた。
また，解析のために必要とされる手法や議論は，関数解析，非線型解析，実解析，測度論，幾何学的測度論，トポロジー，ホモロジー，複素解析等々，数学の多岐の分野に亘っている。それのみならず，物理学からの攻略も時として必要となる。その意味に於いて，その都度必要となる文献を地道に検索し，新たな概念を修得しながら，連携研究者の間で手分けをして課題克服に当たった。

（４）取り扱う問題は基本的にエネルギー汎関数が自由境界を生むような変分変分問題であり，その汎関数の特異性を種々の方法により取り除くことにより問題の解決を図った。まず，その一歩として自由境界は現れないが汎関数自身に特異性を持つ変分問題に取り組み，その解析をするための技術の開拓や本来の自由境界問題の解の構造の予想に努めた。その方法は P.L.Lions による concentration-compactness arguments であるが，汎関数の特異性に付随して表れる困難さを上記の測度論，トポロジー，非線形解析等多方面の技術を駆使して回避，更には方程

式や解に如何なる特徴が隠されているかを解明するよう研究を進めた。また，古くから自由境界が現れる変分問題として Cheeger set に対する問題が存在することに気づいた。この問題は，幾何学的測度論的方法により扱われ，その自由境界が極小曲面により得られることや，p-ラプラシアンの固有値問題の極限状態として記述されることなどから，本課題において研究している問題と密接な関係が予想された。如何なる関係が存在するのか，また Cheeger set の研究方法が，本課題に適用可能であるのか明らかにするため，これまでの Cheeger set に対する先行研究を辿り，その結果と方法について明確にする。

（５）ディリクレ及び非線形ノイマン問題に対する十分な研究が行われた後，自由境界が現れる変分問題について解析を行う。まずは，扱おうとしている Orlicz-Sobolev 空間上で定義された特異な汎関数に対しても自由境界を持つ解が存在するのか，更にはその解の正則性や自由境界自身の正則性について Alt, Caffarelli, Friedman らが得た結果がどのような条件の下で成立するのか，その条件について解明する。

４．研究成果

（１）有界領域に於ける非同次な準線形楕円型方程式のディリクレ問題について，Orlicz-Sobolev の意味で臨界増大度を持つ外力項に不定符号係数が入る場合の解の構造について解析を行った。ここでは，原点付近および無限大付近に於いて主要部と外力項の増大度を比較し，主要部が，原点付近に於いて外力項より早く減少するならば，外力項が奇関数であるという条件の下で，十分小さなパラメータに対して無限個の非自明解が存在することを示した。この結果は p-ラプラシアンに対し，Azorero-Alonso が得ている結果の拡張であるが，今の場合 Orlicz-Sobolev 空間上で定義した汎関数の主要部を u の微分 Du が一様ノルムで大きいところを truncate し，それに対し genus を使った minimax 原理，concentration-compactness arguments による局所(PS)条件を使い，パラメータが十分小であるならば，truncate した微分方程式に無限個の非自明解が存在することが得られる。大域的な結果と違い，compactness の成り立つエネルギーレベルの正確な評価は必要なく N-関数の一般的な評価のみを使い，この結果を得ることができる。次いで準線形楕円型方程式に対する Du の一様評価を行い，これらの解がもとの微分方程式の解であることを示した。

（２）上述と同様な方程式に対する正値解の存在について大域的な結果を得ることができた。すなわち，主要部は原点の付近で指数 q-1，無限大で指数 p-1 の増大度をするものとし，外力項は無限大で臨界増大度指数 p*-1，原点で指数 q-1 より早い減少度をもつ非同次準線形方程式についてその正値解が大域的に存在するための係数の条件，主要部の低階の項に対する条件，p と空間次元 N に関する条件を与えた。この結果は Alves が p-ラプラシアンに対して得た結果を，不定符号を持つ非同次方程式への拡張となっている。方法は変分法，minimax 法，concentration-compactness によるものである。その証明は，まず，方程式に対応するエネルギー汎関数が主要部，外力項それぞれの増大度の仮定の下で mountain pass geometry を満たす状況にあることを示し，Orlicz-Sobolev 空間上で minimax 原理により Palais-Smale 列を持つことを示した。このとき，Orlicz 空間を定義する N-関数より得られる不等式を用いる。外力項の臨界増大度のために compactness が崩れ，得られた Palais-Smale 列の収束性を得ることが困難である。従って，従来行われている Lions による concentration-compactness arguments を Orlicz-Sobolev 空間に対しても適用できることを示した。測度の意味で弱収束したラドン測度の特異部分が有限個のアトムのみからなることが，今の場合も Orlicz-Sobolev の不等式から示すことができ，このことより Palais-Smale 列の関数の導関数が空間上ほとんど至るところ収束することがわかる。これを使えば，Vitali の収束定理を適用することにより弱極限関数が解であることが示される。最大値原理よりこの極限関数が非自明であるならば正値であることがわかり正値解の存在が示される。そのために，まず，もし Palais-Smale 列のエネルギーの収束先が，係数の最大値とソボレフ定数により決まる一定数より小さいレベルであるならば収束解が零解でないことを，主要部の N 関数の増大度，外力項の増大度に注意し，Brezis-Lieb の補題，Vitali の収束定理を使って証明する。次いで，適当な仮定の下で，原点と p-ラプラシアンに対するソボレフの不等式を達成する特異解を結ぶ半直線の道上のエネルギーを評価することにより，エネルギー汎関数の minimax 値が上述の定数より小さいことが示され，正値解が大域的に存在することが示された。この際，仮定として，p が次元 N に対し十分に大きいこと，主要部を定義する N 関数と t^p/p の差がある評価を満たすこと，更に，係数 b(x) が領域の内点で正の最大値を持ち，その近傍で十分高いオーダーで最大値に接していること，の３つの仮定を置き，上に述べた手順で証明することができた。扱った方程

式は Orlicz 空間を定義する一般の N 関数により与えられる退化型楕円型準線形方程式であったが，その適用例として p&q-ラプラシアン，変形平均曲率型方程式をあげ，具体的に p がどの程度の大きさであり，外力項の増大度がどの程度であれば結果が成り立つのかを示した。これらの結果は斉次の方程式，すなわち p-ラプラシアンについては非常に詳しく研究されているが，非斉次タイプの方程式で臨界増大度を持ち，なおかつ不定符号係数を持つ外力項がある場合には大域的な結果は未だ得られていなかった。そういった状況の中で，幾つかの厳しい仮定のもとではあるものの十分に評価できる研究結果と思われる。

（３）主要部は（２）で述べたとおりの方程式であり，外力項の増大度が臨界増大度指数 p*-1，原点で指数 q-1 より遅い場合について正値多重解について考えた。得られた結果は Ambrosetti-Brezis-Cerami がラプラシアンについて得た結果の拡張となっている。すなわち，適当な条件の下で，ある正定数 Λ が存在し，外力項に現れるパラメータ λが Λより小さいときには少なくとも２つの正値解が存在し，Λより大きいときには正値解は存在しないことを示すことができた。ただ，Λ が有限の値かどうかは未だ未解決であり，指数 p と q が等しい場合にのみ Λの有限性を示すことができた。証明の手順は，まずλが十分小さいときに正値解の存在を示す。これは truncation method により汎関数の局所解の存在を示し，apriori 評価を併せて使うことにより得られる。続いて super-,subsolution 法により minimal solution を得ることができる。これが第一の正値大域解である。第二の解については Brezis-Nirenberg による H^1 versus C^1 local minimizers の議論を拡張して適用した。この際，方程式が退化しているため単純に強比較定理は成り立たず，直ちには適用不能であり工夫を要した。第一の正値解，すなわち minimal solution からのずれに対する方程式を考え，その方程式に付随した汎関数を考えると，第一の解がこの汎関数の極小点であることがわかり，mountain pass 環境にあることがわかる。従って，mountain pass theorem により Palais-Smale 列の存在を示すことができる。 更に，この列の弱収束先に第一の正値解を加えたものは最初の方程式の解となることも示される。従って，このずれの関数の収束先が零とならないことを示せば，最大値原理と併せて非負が示されるため，第２の正値解が得られたことになる。ここにおいても，この汎関数の Palais-Smale 列のエネルギーの収束先が minimal solution のエネルギーと爆発解によって得られるエネルギーの和より小さければ Palais-Smale 列は零には弱収束しないことが concentration-compactness arguments により示される。最後に，原点と特異解を結ぶ半直線をとり，この上でのエネルギーの最大値で minimax 値を評価することにより第２の正値解の存在を示すことができた。例として，（２）と同じく p&q-ラプラシアン，変形平均曲率型方程式について適用したが，いずれも主要部の増大指数に対しては空間次元と関わってかなり制限的な仮定が付いてしまった。最近，p&q-ラプラシアンをはじめとする退化型準線形方程式に対する研究が進みつつあるが，いずれもパラメータλに対し局所的な結果である。ここで得た結果は大域的なものではあるが，限定的なものであり，今後更に改良するべき多くの問題が残されている。

（４）これまではディリクレ問題について議論を行ってきたが，非線形ノイマン問題について同様の方程式に対して研究結果を得た。方程式の右辺に臨界増大度指数を持つ外力項，境界に於けるノイマン値としてパラメータλを係数としてもつ非線形項（いずれも不定符号係数 b(x)，a(x) をそれぞれ持つ場合）が存在する退化型準線形方程式の正値解の存在を議論した。境界値における係数 b(x) が正となる点が境界に於いて存在するならば（１）と同じく，十分小さいパラメータλに対して無限個の非自明解が存在することを示すことができた。方法は（１）で行ったものと同様である。

（２）に対するものと同じ状況の時，すなわち，境界における外力項は原点付近で主要部の増大指数より大きく，方程式の右辺は臨界増大度を持つ外力が存在する時を考えた。主要部を定義する N 関数と t^p/p の差に対する仮定を置き，更に境界上で定義された関数 b(x)が平均曲率正の点に於いて正の最大値を取り，その点に於いて最大値に十分高いオーダーで接しているならば，任意の正値λに対し正値解が存在することを示した。証明は（２）と同じような議論で進めるが，Palais-Smale 列の爆発点が境界に現れるときのエネルギーの詳細な評価が必要であり，minimax 値の評価に対する境界の平均曲率の依存性等，注意深い計算が必要であった。更に，（３）に対する状況－境界における外力項は原点付近で主要部の増大指数より小さく，方程式の右辺は臨界増大度を持つ外力が存在する時－に対して一部の結果を得た。ディリクレ問題の場合と異なり，非線形ノイマン問題については正値解の存在するパラメータλの上限の値Λが有限値であることは簡単に示すことができることがわかった。また a(x)が非負関数の時，Λより小さい任意の正値λに対し正値解の存在を得ることが

できた。しかし，非線形ノイマン問題に対しては，ディリクレ問題の時に用いた強比較定理に対する方法が適用できず，第２の正値解の存在を示すことができなかった。ただ，主要部がp-ラプラシアンの場合に限っては，その同次性を用いることにより，Λより小さい任意の正値λに対し第２の正値解が存在することがわかり，Ambrosetti-Brezis-Ceramiの拡張を得ることができた。退化型の方程式についてどのような状況の下で強比較定理が成り立つのか，これ自身面白い問題と思われるが，ここに利用できるような結果は未だ得ていない。現問題と併せて今後の課題である。

（５）研究課題が自由境界問題の解析であったが，それに対する詳しい研究を進めるために（１）から（４）の解析を行った。それにより解の性質については十分に詳しい結果を得ることができたと評価できるが，自由境界の十分な解析には至ることができなかった。非線形外力項が存在し，主要部がN関数から決まる非同次の退化楕円型方程式についても，そのエネルギー汎関数を Orlicz 空間上で解析することにより自由境界の存在については示すことができた。また，（１）～（４）の解析より解の正則性についても証明することができた。しかし，自由境界の正則性については不十分であり，ほとんど結果を得ることができなかったことは反省するべき点である。非同次，退化性故に比較定理等の議論が十分に行えず，幾何学的測度論を十分に発揮することができなかったが，今後，既に得られた（１）～（４）の解の性質に対する結果に基づき，更に詳しい自由境界の分析を行うことが課題である。また，本研究が，違った観点から幾何学的問題として現れたCheeger set と関わりを持ち，ある極限問題や，極小曲面により実現される等の示唆を得たことも今後の研究の発展に大きな方向を与えられたと判断できる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Kimiaki Narukawa, Multiple existence of positive solutions to quasilinear elliptic equations involving indefinite lower term, AIP Conference Proceedings, 査読有, Vol.1493, 2012, pp.691-698, DOI: 10.1063/1.4765562
② Kimiaki Narukawa, Yukihiro Takajo, Existence of nonnegative solution for quasilinear elliptic equations with indefinite critical nonlinearities, Nonlinear Analysis, 査読有, Vol.76, No.16, 2011, pp.5793-5813 DOI: 10.1016/j.na.2011.05.071

〔学会発表〕（計５件）

① Kimiaki Narukawa, Global results on the existence of positive solutions for quasilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions, Functional Analysis and Applications, 2013年2月12日，神戸大学
② 成川公昭，非同次な主要部を持つ準線形楕円型方程式について，日本数学会，2012年8月7日，東京理科大学
③ Kimiaki Narukawa, Multiple existence of positive solutions to quasilinear elliptic equations involving indefinite lower term, 9th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, 2012 年 7 月 12日，ウイーン工科大学，オーストリア
④ Kimiaki Narukawa, Existence of a Nonnegative Solution for Quasilinear Elliptic Equations with Indefinite Critical Nonlinearities, 7th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, 2011年7月20日，バンクーバーコンベンションセンター，カナダ
⑤ 成川公昭, On multiplicity of positive solutions for a quasilinear elliptic equation with an indefinite critical term, 佐賀大学における微分方程式セミナー，2010年8月24日，佐賀大学

６．研究組織
(1)研究代表者

成川　公昭　(NARUKAWA　KIMIAKI)
鳴門教育大学・大学院学校教育研究科・教授
研究者番号：60116639

(2)連携研究者

松岡　隆　(MATSUOKA TAKASHI)
鳴門教育大学・大学院学校教育研究科・教授
研究者番号：50127297
伊藤　正幸　(ITO MASAYUKI)
徳島大学・ソシオ・アーツ・サイエンス研究部・教授
研究者番号：70136034
深貝　暢良　(FUKAGAI NOBUYOSHI)
徳島大学・ソシオテクノサイエンス研究部・准教授

研究者番号：90175563