

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540231

研究課題名(和文) 平衡点渦系の平均場と点渦系の関連の探求

研究課題名(英文) Study on the relation between the mean field of the equilibrium vortices and the vortex system

研究代表者

大塚 浩史(Ohtsuka, Hiroshi)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：20342470

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：点渦系の平衡平均場を与える汎関数のグラフの構造を、点渦系のハミルトニアンと関連づけて考察した。主たる成果は、平均場の爆発列と爆発極限に現れる定常点渦系(ハミルトニアンの臨界点)が与えられたとき、その定常点渦系のモース指数を用いて、爆発に十分近づいた平均場(汎関数の臨界点)のモース指数を評価する不等式を与えたことである。考察した平均場は、通常自由エネルギー汎関数を簡略化した汎関数から得られるもの(ゲルファント問題の解)だが、平均場が1点爆発する場合を示した既知の結果を拡張し、多点爆発する一般の場合について結論を得た。関連して、ゲルファント問題の線形化固有値の一部について、精密な挙動を与えた。

研究成果の概要(英文)：I studied the structure of the graph of the functional for mean fields of equilibrium vortices in terms of the Hamiltonian of vortices. A mean field is a critical point of a functional and steady vortices form a critical point of a function (Hamiltonian). The main result is to determine the inequalities that estimate the Morse index of the mean field, which is sufficiently close to blow-up, in terms of the Morse index of the steady vortices, when a blow-up sequence of mean fields and the steady vortices in its blow-up limit are given. The mean fields that I consider are solutions of the Gel'fand problem, which comes from the functional that is rather simplified one from the usual free energy functional for mean fields. Our conclusion, however, generalizes the known result that treats one point blow-up cases only to general many points blow-up cases. I also give some fine behaviors of linearized eigenvalues of Gel'fand problem.

研究分野：変分問題

キーワード：関数方程式論 変分法 点渦 渦点 平均場 数理物理

1. 研究開始当初の背景

(1)点渦系の問題点:

2次元完全流体の運動は渦度場で記述されることが知られている。しかしより具体的な流体の運動を記述するために、渦度が数個の点に集中している(すなわち、渦度場がデルタ関数の和で表される)場合を考え、その点の時間発展を考察することがなされている。これが「点渦系」である。しかし、点渦が与える渦度場のエネルギーは無限大であり、点渦が定める渦度場は、完全流体の基礎方程式であるオイラー方程式を、弱い意味でも満たさない。「点渦とはオイラー方程式の何なのか」、このことの問題を目標として研究に取り組んできた。

(2)点渦系の平衡平均場とその極限:

このような点渦系に対し、近年統計力学を用いた考察がなされている。具体的には、点渦系の平衡状態というものを定め、平衡状態にある点渦系に対し、点渦の数を限りなく大きくした極限において、点渦系が定める「離散的な渦度場」が「連続的な渦度場」に収束することが示されている(Caglioti et al. (1992, CMP)など)。この連続的な渦度場が点渦系の平衡「平均場」と呼ばれるものであり、オイラー方程式の定常解を与えることが知られている。平均場が満たすべき方程式は「平均場方程式」と呼ばれるが、数学的には指数関数型非線形項を持つ半線形楕円型方程式であり、多くの由来を持ち深く研究されている。特に、解の列で非有界なもの(爆発列)の挙動が詳しく調べられている。具体的には、爆発点(関数の値が無限大に近づく点)が有限個の点になること、そして、それらの点が点渦系の停留点になることが示されている(Nagasaki-Suzuki, Asympt. Anal., 1990)。すなわち、平衡平均場の爆発極限では、必ず定常点渦系が爆発点として現れる。

(3)エネルギー臨界点の対応:

平均場は自由エネルギー汎関数の臨界点であり、点渦系の停留点は、点渦系のハミルトニアンと呼ばれる関数の臨界点として与えられる。この観点で上記爆発列の挙動を述べれば、自由エネルギー汎関数の臨界点の爆発極限には、必ず点渦系のハミルトニアンの臨界点が爆発点として現れる、となる。この臨界点の対応には、更に深い関連があることを期待するのは自然であろう。例えば、自由エネルギー汎関数の臨界点(平均場)の爆発列の爆発極限に現れるハミルトニアンの臨界点(定常点渦系)が非退化なら、爆発に十分近づいた自由エネルギーの臨界点も非退化であること(漸近的非退化性)或いはそれを精密化した、ハミルトニアンの臨界点のモース指数を用いて爆発に十分近づいた自由エネルギー汎関数の臨界点のモース指数を評価することなど、汎関数と関数の、それぞれの臨界点の周りのグラフの形状に関する対応が期待される。この対応が分かることにより、それぞれの臨界点の近傍にある、非

定常な渦度場の時間発展と、非定常な点渦系の時間発展との対応が期待され、点渦系とは何か、という問の答えにつながると考えている。

(4)研究開始直前の状況:

この臨界点の周りのグラフの形状の対応について、研究開始直前に進展が報告された(Gladioli-Grossi (漸近的非退化性, Commun. PDE, 2004; モース指数の評価, AIHP-AN, 2009)。これらは、平均場方程式を簡略化した、2次元におけるゲルファント問題と呼ばれる非線形固有値問題において示されたものであり、爆発点が1点となる解の列に対するものであった。これを一般の多点爆発の場合や平均場方程式の場合に拡張することを本研究の目的の中心に据え、研究の構想を立てた。

2. 研究の目的

「平衡点渦系の平均場は点渦系の何を表現し得るのか」、これを明らかにすることを目標に、平衡点渦系の平均場の空間的構造、並びに、平均場を与える自由エネルギー汎関数の、無限次元空間におけるグラフの構造を解析する。特にこれらの構造を、有限次元系である点渦系のハミルトニアンと関連づけて解明することが目的である。具体的には、平均場の自由エネルギー汎関数の変分構造(臨界点の非退化性・モース指数など)が、適切な状況のもと、点渦系のハミルトニアンの幾何学的構造と等価なものである、という予想を検証する。これを基に、点渦の運動をその平均場の自由エネルギー汎関数の観点から見直し、点渦系の新たな特徴付けを探る。またこれらから得られた知見を、類似の非線形偏微分方程式に適用し、手法の確立を目指す。以上が、本研究の当初の目的であった。

3. 研究の方法

(1)研究の中心は、当初計画通り、Gladioli-Grossi による、1点爆発する平均場(但し、簡略化したゲルファント問題の解)の漸近的非退化性(Commun. PDE, 2004)の、多点爆発する場合への拡張であった。Grossi 氏、鈴木貴氏による協力が得られ、比較的速やかにこれは達成できた。多点爆発の議論を1点爆発の場合に帰着する「局所化」について、鈴木氏から留数定理の証明に類する考察の必要性を指摘され、それを元に議論を展開し、共同研究として結果を得ることができた。

(2)引き続き、Gladioli-Grossi によるモース指数の評価(AIHP-AN, 2009)の多点爆発する場合への拡張に取り組んだが、既存の議論だけでは困難があり、線形化作用素の固有関数の精密な挙動を得る必要があった。これを得る過程で、レーリッヒ-ポッホザイェフ等式の有用な活用法を見出し、多点爆発する場合の漸近的非退化性を示す議論も大幅に整理された。Gladioli 氏による協力も加わり、最終的に、漸近的非退化性の精密化として、モ

ース指数の評価についても、多点爆発する場合まで結論を拡張することができた(雑誌論文)。

(3)当初は、一般の平均場方程式、類似の非線型偏微分方程式についても、類似の現象の考察を進める計画であったが、上記モース指数の評価を得るのに時間を要したこと、またその間、Gladiali 氏、Grossi 氏、鈴木貴氏との良好な共同研究が継続していたこともあり、残念ながら、多くを考察することはできなかった。しかし、得られた考察を元に、類似の構造の方程式を扱う、4次元の重調和作用素に関するゲルファント問題について、部分的ではあるが、漸近的非退化性を得ることができた(雑誌論文)。これは、重調和作用素についての知見をもつ高橋太氏との共同研究として進めた。また、同様に計画していた非定常問題や数値解析については、それらを専門とする物理学者である八柳祐一氏と研究集会を度々企画して、氏の共同研究者を含めて交流を深め現状の把握に努めたが、残念ながら研究成果を上げるには至らなかった。

(4)一方、見出したレーリッヒ-ポッホザイエフ等式の活用法を用い、様々な積分量を正確に求めることで、モース指数を評価するための線形化作用素の固有値の挙動を、予期せぬほど精密に表すことができた(雑誌論文)。

4. 研究成果

(1)主な設定:

2次元ゲルファント問題の多点(m 点)爆発解列が与えられているとする。このとき、その極限に現れる爆発点は、点渦系のハミルトニアン H の臨界点を与えることは知られている(Nagasaki-Suzuki (Asympt. Anal., 1990))。ゲルファント問題は自由エネルギー汎関数を簡略化した汎関数から導かれるが、ゲルファント問題の解を導く汎関数も、簡単のため、ここでは自由エネルギー汎関数と呼ぶことにする。

(2)主な成果:

(1)の状況を仮定するとき以下を得た。

爆発点がハミルトニアン H の臨界点として非退化なら、爆発に十分近づいたゲルファント問題の解も、自由エネルギー汎関数の非退化臨界点である(漸近的非退化性)。

爆発点(ハミルトニアン H の臨界点)のモース指数(MV)を用いて、爆発に十分近づいたゲルファント問題の解(自由エネルギー汎関数の臨界点)のモース指数(MM)を上下から評価する不等式を与えた。これは、爆発点为非退化臨界点の場合、漸近的非退化性を与え、「 $(MG)=3m-(MV)$ 」という等式を導く(雑誌論文)。

爆発点が m 点の場合、ハミルトニアン H は $2m$ 変数の関数になる。このことから、爆発点のモース指数(MV)は、 0 以上 $2m$ 以下の整数である。よって、 (MG) は (MV) と、少なくとも m のずれがある。これは、ゲルファント問題の

線形化固有値に、漸近的に 0 に近づくものがあることから導かれる。この線形化固有値の 0 に近づく挙動を与える、爆発点の位置から定まる行列を見出した。(雑誌論文)。

(3)主な成果の国内外における位置づけとインパクト:

(2)で述べた、漸近的非退化性、モース指数の評価、共に、類似の方程式、類似の解の爆発問題においても考察されているが、その多くは1点爆発の場合である。これは、解析手法を爆発点の近傍に帰着する「局所化」が実現されていないことによると考えられる。本研究は、解析の局所化を主眼として進めたものであり、 (2) の方が、解析手法も深化している。更にその手法を深化させて、 (2) の成果も得られた。

現在これらの手法を応用し、4次元の重調和作用素に関するゲルファント問題に解析手法を適用し、部分的な結果を得た(雑誌論文)。残念ながら4次元特有の構造により、2次元のゲルファント問題では問題にならなかった箇所議論が進められず、現時点では部分的な結論に留まる。しかし、見出したレーリッヒ-ポッホザイエフ等式を用いて、まだ議論の余地があると考えている。

(2)で得られたことは、現時点では類似の結果は知られていないと考えている。特に、 $(1)(2)$ で述べた点渦系のハミルトニアンと平均場を与える汎関数の関連は、 (2) の結果に至るまで深く存在していると考えていたが、線形化固有値の 0 に近づく挙動を与える行列とハミルトニアンとの関係は、現在の所正確に述べるには至っていない。

このように、平均場の爆発挙動の理解が進み、ハミルトニアンとの関係について新たな局面にたどり着いたことは、インパクトがあると考えている。

(4)今後の展望:

本研究を通して、点渦系の平衡状態を記述する平均場の理解が深化したが、たどり着いた所は未開の領域であると考えている。当初の計画で考察を検討していた非定常状態に進む以前に、まず(2)で述べた成果の理解を深め、定常状態の正確な理解を進める必要を感じている。実際、新たに見出したレーリッヒ-ポッホザイエフ等式の活用方法が適用できる事例が多数残されており、普遍的な立場でその価値を見極めることができる可能性を感じる。

以上、本研究を通して、残念ながら当初の計画の実現が叶わなかったところもあるが、著しく深化できた方向もあり、大きな成果が上がったと考えている。これを元に、研究の再構築を検討したい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(雑誌論文)(計11件)

Hiroschi Ohtsuka and Futoshi Takahashi,

Local asymptotic nondegeneracy for multi-bubble solutions to the biharmonic Liouville-Gel'fand problem in dimension four, *Differential and Integral Equations*, 査読有, 28, 2015, pp. 801-822,

<http://projecteuclid.org/euclid.die/1431347864>

Francesca Gladiali, Massimo Grossi, Hiroshi Ohtsuka, On the number of peaks of the eigenfunctions of the linearized Gel'fand problem, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 査読有, 2014, 電子出版済, 15pages, DOI:10.1007/s10231-014-0453-z

Francesca Gladiali, Massimo Grossi, Hiroshi Ohtsuka, Takashi Suzuki, Morse indices of multiple blow-up solutions to the two-dimensional Gel'fand problem, *Comm. in Partial Differential Equations*, 査読有, 39, 2014, pp.2028-2063, DOI:10.1080/03605302.2014.930485

[学会発表](計17件)

Hiroshi Ohtsuka, On the number of peaks of the eigenfunctions of the linearized Gel'fand problem, 京都大学数理解析研究所研究集会「偏微分方程式の解の形状と諸性質」, 2014年11月6日, 京都大学(京都府・京都市)

Hiroshi Ohtsuka, Recent developments of the blow-up analysis to the two-dimensional Gel'fand problem, International Conference "Quantization Blow-up and Concentration in Mathematical Physics View Point", 2013年3月26日, 大阪大学(大阪府・豊中市)

Hiroshi Ohtsuka, On the asymptotic nondegeneracy for the problems with exponential nonlinearities, 第29回九州における偏微分方程式研究集会, 2012年1月24日, 九州大学(福岡県・福岡市)

Hiroshi Ohtsuka, Vortices and some variational problems, 第3回仙台楕円型・放物型微分方程式研究集会, 2010年12月3日, 東北大学(宮城県・仙台市)

Hiroshi Ohtsuka, On some variational problems relating to vortices, 京都大学数理解析研究所研究集会「流体と気体の数学解析」, 2010年7月7日, 京都大学(京都府・京都市)

[その他]

大塚のホームページの入り口:

http://mp_o2.w3.kanazawa-u.ac.jp/

2011年に開催した合宿型研究集会のホームページ:

http://www.bea.hi-ho.ne.jp/pickles/2011RIMS_Onsager/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大塚 浩史 (OHTSUKA, Hiroshi)
金沢大学・理工研究域数物科学系・教授
研究者番号: 20342470

(3) 連携研究者

田中 視英子 (TANAKA, Mieko)
東京理科大学・理学部・助教
研究者番号: 00459728
(平成22年度)

辻川 亨 (TSUJIKAWA, Tohru)
宮崎大学・工学部・教授
研究者番号: 10258288
(平成22、23年度)

矢崎 成俊 (YAZAKI, Shigetoshi)
宮崎大学・工学部・准教授
研究者番号: 00323874
(平成22、23年度)

(4) 研究協力者

GLADIALI, Francesca
(平成25年度から)

GROSSI, Massimo
(全期間)

RICCIARDI, Tonia
(平成22年度から24年度)

鈴木 貴 (SUZUKI, Takashi)
(平成23年度から)

高橋 太 (TAKAHASHI, Futoshi)
(平成23年度から)

八柳 祐一 (YATSUYANAGI Yuichi)
(平成24年度から)