様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月１４日現在

機関番号：３２４０７
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５４０２３３
研究課題名（和文）　有理型函数論の応用による複素函数方程式の研究

研究課題名（英文）　Research of complex functional equations by means of theory of meromorphic functions

研究代表者
石崎　克也（ISHIZAKI　KATSUYA）
日本工業大学・工学部・教授
研究者番号：　60202991

研究成果の概要（和文）：　複素平面上で有理型函数を解に持つ函数方程式の研究を行った。差分 Riccati 方程式と線形 2 階同次差分方程式との関係を明確にし，差分方程式の有理型函数解の存在定理，解の増大度などを調べた。また，函数方程式を取り扱う道具として，位数の小さい有理型函数の性質を調べた。Valiron-Mokhon'ko の定理を超越整函数への拡張し，Schröder 方程式に応用した。線形 q-差分方程式の解の存在を判定するために，テーラー展開の係数と対数位数の関係について考察した。

研究成果の概要（英文）：　We are concerned with meromorphic solutions of some functional equations in the complex plane. We obtained a relation between difference Riccati equations and linear difference equations of second order, and also investigated the existence of meromorphic solutions to some functional equations and the order of growth of meromorphic solutions. Further, we considered the properties of meromorphic functions of small order. The general form of the Valiron-Mokhon'ko theorem is established. We applied this result to Schröder type functional equations. The relation between the coefficients of an entire function and the order of growth is obtained in order to investigate the existence of entire solution of linear q-difference equations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１１年度	600,000	180,000	780,000
２０１２年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：　数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・大域解析学
キーワード：　関数方程式の大域理論　有理型函数論

１．研究開始当初の背景
これまでの研究を続ける形で，複素平面上で有理型函数を解に持つ函数方程式の研究を発展させる計画を立てた。特に，方程式 $(*)\quad f(G(z)) = H(f(z))$ に代表されるように合成を含む函数方程式は，値分布論的にも複素力学系的にも興味のある対象であった。そして，現在も未解決の部分が多く残され重要な研究対象である。
存在定理については，G, Hの条件によっては局所解の存在が示させる場合がある。更に具体例として，大域解の存在まで示させる場合

があるが，一般論は完結していない。当初は，函数方程式$(*)$についての解の存在定理から始めることを考えていた。Goldstein によれば，G, H が多項式の場合に，$(*)$は超越的有理型解を持たないことである。一方，Hが有理函数の場合は超越的有理型解を持つ場合があるということであった。これは，Nevanlinna 理論の研究の一翼である超越的有理型函数の合成分解の研究から構成できることを意味していた。

研究課題として，対象を有理函数から超越整函数に置き換えた場合の考察は自然な流れと考えられた。

有理型函数論の性質のひとつとして評価式に除外集合を含むものが多いことがある。反復合成が方程式$(*)$を取り扱う手段として有効なことは前述のように明白な事実であるが，微分方程式の解を評価する場合と異なり，除外集合を無視することができない。そこで，どの様な条件の下に除外集合を除去できるのか有理型函数論の基本に戻って精密化する必要があった。更に，Gの特別な場合の考察としての 差分$\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$や q-差分$\Delta$q$f(z) = f(qz) - f(z)$に対応する形で，近年条件付きではあるが一般化がなされた Nevanlinna 理論も平行して研究するべきという背景があった。

２．研究の目的

本研究課題の申請時における当初の研究目的は，有理型函数論，特に Nevanlinna 理論・Wiman-Valiron 理論を応用して，半共役を与える函数方程式$(*)$や複素平面上での微分方程式の未解決問題を考えること，有理型函数論に特有の評価式に付帯する除外集合を函数方程式の性質からどの程度除去できるかを調べることを目的にした。更に，その応用によって函数方程式の有理型解の振る舞いや，その基本性質と函数の反復による力学系（複素力学系）との関係を調べることであった。当初，具体的に挙げた項目の中からいくつかを述べておく。

(1)方程式$f\big(G(z)\big) = H(f(z))$に代表されるように合成を含む函数方程式については，Nevanlinna 理論における Valiron-Mokhon'ko の定理の一般化がもとめられる。整函数論の Wiman-Valiron 理論をよりどころにするが，ここでは除外集合を考えなければならない。方程式の特徴などから，除外集合除去可能条件を見いだすことが課題である。

(2)Nevanlinna 理論は近年，差分$\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$や q-差分$\Delta$q$f(z) = f(qz) - f(z)$に対応する形で一般化がなされ，それぞれ差分方程式や q-差分方程式への応用がされている。合成を含む函数方程式に対応するため，$\tau(z)$を多項式や超越整函数として $\Delta\tau f(z) = f(\tau(z)) - f(z)$ を考えて，Nevanlinna 理論の拡張にも取り組みたい。

３．研究の方法

本研究課題に対し，実際に取り組んだ時の研究方法について纏めることにする。

(1)複素差分方程式を取り扱うにあたり，複素微分方程式と対応させながら理論を構成していくことを考える。当然ながら，複素微分方程式で使用可能な評価式に対応する差分版の評価式を導いていく必要もある。Nevanlinna 理論や Wiman-Valiron 理論が複素微分方程式の研究に重要な役割を果たしてきたことは言うまでも無い。中核となる問題意識は，非線形の部分は Riccati 方程式 $w'(z) + w(z)^2 + A(z) = 0$ に，線形の部分は 2 階線形方程式 $u'' + A(z)u = 0$ に凝縮されている。近年の対数微分の補題の差分類似に関する評価式から，差分作用素についての値分布理論が急速に進歩した。現実には，高階の非線形差分方程式や一般的な差分多項式についての値分布や一意性の問題などを取り扱っている論文も数多く発表されている。ここでは，2 つの基本的な方程式を中心に議論を進めることにした。ひとつは差分 Riccati 方程式

$$\Delta f(z) + \frac{f(z)^2 + A(z)}{f(z) - 1} = 0 \qquad \text{(E1)}$$

であり，もうひとつは 2 階線形差分方程式

$$\Delta^2 y(z) + A(z)y(z) = 0 \qquad \text{(E2)}$$

である。研究目的のひとつ，$\Delta y(z)/y(z)$ を評価することに関連して，$f(z) = -\Delta y(z)/y(z)$ は，(E1)と(E2)の間を行き来する路となる。$y(z)$が有理型ならば$f(z) = \Delta y(z)/y(z)$もまた有理型なのは明らかだが，差分の場合はこの逆も成立する。この性質は，微分方程式の場合と異なり，解の構成に有効である。

(2) 多項式係数線形 q-差分方程式の整函数解 $f(z)$ の増大は

$$\log M(r,f) = K\,(\log r)^2(1 + o(1))$$

と表されて，Kは係数多項式の次数で決定される。整函数としての位数は零であるが，対数位数を整函数の冪級数展開から表現する方法を精密化して解の存在（非存在）証明に応用する方向で研究を進める。

４．研究成果

本研究期間に得られた結果について，［3. 研究の方法］に挙げた順に報告する。

(1)先ず，差分 Riccati 方程式(E1)についての命題を紹介する。

命題　差分 Riccati 方程式（E1）が相異なる有理型函数解 $f_1(z)$，$f_2(z)$，$f_3(z)$ を持てば，任意の（E1）の有理型函数解 $f(z)$ は周期函数と$f_1(z)$，$f_2(z)$，$f_3(z)$で表現される。

次の命題は，微分 Riccati 方程式とは異なる差分 Riccati 方程式特有の性質である。

命題　差分 Riccati 方程式（E1）が相異なる有理型函数解 $f_1(z)$，$f_2(z)$を持てば，$f_1(z)$，$f_2(z)$と異なる有理型函数解 $f_3(z)$が存在する。

次に，2 階線形差分方程式（E2）についての命題を紹介する。有理型函数　$y_1(z)$，$y_2(z)$，は2階線形差分方程式（E2）の解とし，$Q_1(z)$，$Q_2(z)$ は周期 1 の周期函数とする。線形結合 $Q_1(z)y_1(z)+Q_2(z)y_2(z)$，は（E2）を満たすことから，(E2) の有理型函数解は周期 1 の周期函数上のベクトル空間とみなすことができる。そこで，ある周期 1 の周期函数 $Q_1(z)$，$Q_2(z)$があって $Q_1(z)y_1(z)+Q_2(z)y_2(z)=0$ を満たす時に $y_1(z)$，$y_2(z)$ は 1 次従属といい，そうでない場合に 1 次独立という。函数 $f(z)$，$g(z)$ に対して Casoratian を

$$C(z)=C(f,g;z)=\begin{vmatrix} f(z) & g(z) \\ \Delta f(z) & \Delta g(z) \end{vmatrix}$$

で定義する。函数　$f(z)$，$g(z)$ が一次独立であることと同値な条件は，$C(f,g;z)\neq 0$である。

命題　函数 $\mathrm{y}_1(z)$，$y_2(z)$ は2階線形差分方程式（E2）の有理型函数解とする。このとき，Casoratian $C(f,g;z)$は次の 1 階線形差分方程式を満たす。

$$\Delta C(f,g;z)=A(z)C(f,g;z) \qquad \text{(E3)}$$

命題 (i) 有理型函数 $\mathrm{y}_1(z)$，$y_2(z)$ は 1 次独立な 2 階線形差分方程式（E2）の解とする。函数 $\mathrm{y}_1(z)$, $\mathrm{y}_2(z)$ が $\mathrm{y}_2(z)=g(z)y_1(z)$ と表せるならば $g(z)$は次の差分方程式を満たす。

$$\Delta g(z)=\frac{C(f,g;z)}{y_1(z)y_1(z+1)} \qquad \text{(E4)}$$

(ii) 有理型函数 $\mathrm{y}_1(z)$ は 2 階線形差分方程式（E2）の解とし,$C(z)$は差分方程式（E3）の有理型函数解とする。このとき，函数 $g(z)$ が（E4）を満たすならば，$\mathrm{y}_2(z)=g(z)y_1(z)$ は（E2）の有理型函数解になる。

差分 Riccati 方程式(1)および 2 階線形差分方程式(2)の超越的有理型函数解の増大度と値分布についての結果を述べることにする。複素微分方程式論においては，多くの興味ある問題は，存在する有理型函数の増大度の上限を調べることを問題意識においた。しかしながら，複素差分方程式においては，解の増大度は係数としてあらわれる周期 1 の周期函数によって任意に大きくできるため，存在する超越的有理型函数の増大度の小さなものを研究対象におくことが多い。

定理　差分 Riccati 方程式（1）において $A(z)$ は有理函数とする。また，(1) が有理函数解 $a(z)$ を持つと仮定する。このとき，(1) は位数 1/2 より小さな超越的有理型函数解を持つことは無い。

定理　2 階線形差分方程式（2）において $A(z)$は有理函数とする。このとき, (2) は位数 1/2 より小さな超越的有理型函数解を持つことは無い。更に, (2) が有理函数解を持てば位数 1 より小さな超越的有理型函数解を持つことは無い。

差分 Riccati 方程式(E1)の超越的有理型函数解と有理函数解の関係について述べておく。先ず，比較のため微分の場合を確認しておく。（微分）Riccati 方程式が超越的有理型函数解 $w(z)$を持つとする。有理函数 $\alpha(z)$ が（微分）Riccati 方程式の解でないならば，$w(z)-\alpha(z)$ は無限個の零点を持つ。差分 Riccati 方程式(E1)が超越的有理型函数解 $f(z)$ を持つとし，$a(z)$ は有理函数とする。微分方程式の場合と同様に $a(z)$ が(E1)の解で無いならば $f(z)-a(z)$ は無限個の零点を持つ。

（微分）Riccati 方程式が超越的有理型函数解 $w(z)$を持つとし，有理函数 $\alpha(z)$ が（微分）Riccati 方程式の解であるとする。このとき，$w(z)-\alpha(z)$ の零点は有限個であることが知られている。しかしながら，差分の場合はこの性質は必ずしも成り立たない。即ち，(E1) が有理函数解 $a(z)$ を持つとするときに，ある超越的有理型函数解 $f_1(z)$ については $f_1(z)-a(z)$ が無限個の零点を持ち，別の超越的有理型函数解 $f_2(z)$ については $f_2(z)-a(z)$ が有限個の零点を持つ例が存在する。

今後の展望としては，定理 1，定理 2 においても，丁度位数 1/2 になる超越的有理型函数解を持つ例が構成され，定理はシャープであることが示されることが期待される。また，定理 1 に於いて，「(1) が有理函数解 $a(z)$ を持つと」という仮定はどのような条件のもとに緩やかにできるかが類別されることも期待される。

(2) 整函数の位数と冪級数展開の係数の関係

について確認をした。整函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ に対して，係数から決まる値

$$\lambda=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log\log|1/a_n|}$$

を考える。条件 $0<\lambda<1$ のもとに対数位数(logarithmic order)

$$\tau=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log\log r}$$

との間に,

$$\tau=\frac{1}{1-\lambda}$$

が成立する。この他に，対数型(logarithmic type)についての考察や $\lambda=0,1$ の場合の具体例の構成を行った。一般的な，q-差分方程式への応用や，$\Delta q f(z)/f(z)$ の精密な評価は今後の課題である。展望としては，$g(z)$ を線形 q-差分方程式の解としたときに

$$h(z)=\Delta q g(z)/g(z)$$

の満たす非線型方程式（q-差分方程式 Riccati 方程式）がどのような函数論的性質を持つかを同様の方法で解明されることが期待される。

［１．研究の目的]の(1)にある合成を含む函数方程式の結果は，条件付きの形であるが，下記[５．主な発表論文等]の発表論文①に，また除外区間についての結果は②に発表することができた。差分作用素についての評価に関わる線形および非線型方程式についての結果は③に発表した。本研究課題採択中に進展した研究内容は，［４．研究成果]で述べたように，準備的なものが多く，目的を十分に達成するには及ばず，研究目的のいくつかは今後の課題として残ることとなった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Ishizaki K., S. Morosawa and M. Yakou, Meromorphic solutions of functional equations $f(G(z))=R(f(z))$, Complex Var. Elliptic Equ., 査読有, VOL. 57, 2012, 15-22,
DOI: 10.1080/17476933.2010.504833.

② Ishizaki, K. and N. Yanagihara, Entire functions of small order of growth, Comput. Methods Funct. Theory 査読有 VOL.11, 2011, 301-308,
URL: http://www.heldermann.de/CMF/CMF11/CMF111/cmf11019.htm.

③ Ishizaki, K., On difference Riccati equations and second order linear difference equations, Aequationes Math., 査読有, VOL. 81, 2011, 185-198,
DOI: 10.1007/s00010-010-0060-z.

〔学会発表〕（計３件）

① 石崎克也, On difference equations and value distribution theory, Workshop on Complex Analysis and its Applications to Differential and Functional Equations, 2012 年 12 月 03 日, University of Eastern Finland （フィンランド）

② 石崎克也, 複素差分方程式と値分布理論について，函数論シンポジウム，2012 年 11 月 25 日，金沢大学

③ 石崎克也 藤解和也, On logarithmic order of an entire function in terms of the coefficients, 日本数学会年会, 2012 年 3 月 26 日，東京理科大学

６．研究組織

(1)研究代表者
石崎 克也（ISHIZAKI KATSUYA）
日本工業大学・工学部・教授
研究者番号：６０２０２９９１

(2)研究分担者
（ ）

研究者番号：

(3)連携研究者
森 正気 (MORI SEIKI)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：８０００４４５６

下村 俊（SHIMOMURA SHUN)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：００１５４３２８

諸澤 俊介（MOROSAWA SHUNSUKE)
高知大学・理学部・教授
研究者番号：５０２２０１０８

藤解 和也 (TOHGE KAZUYA)
金沢大学・理工学域・教授
研究者番号：３０２６０５５８