

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月25日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540235

研究課題名（和文） 非線形退化放物型および双曲型方程式系のエントロピー解の研究

研究課題名（英文） Entropy solutions for nonlinear degenerate parabolic equations and hyperbolic systems of conservation laws

研究代表者

小林 和夫（KOBAYASI KAZUO）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：80103612

研究成果の概要（和文）：1次元 $n \times n$ 保存則方程式系の初期値問題の可解性については、A. Bressan 等による波面追跡法を用いた一連の研究があるが、その証明手段はかなり複雑である。本研究では、1次元 2×2 保存則方程式系の場合にリーマン問題（初期値が階段関数）についてショック曲線の幾何学的構造の解明を行った。そして、その構造理論を用いて一般の初期値問題を扱い、波面追跡法における議論の簡略化に成功した。また、非線形等方的退化放物型方程式に対する初期値・境界値問題を考察し、エントロピー解の比較定理と存在定理を得た。

研究成果の概要（英文）：The theory of the Cauchy problem for one-dimensional $n \times n$ systems of conservation laws has evolved from a set of works by A. Bressan et al via the front tracking method. The argument developed there is, however, rather complex. In this research we restricted ourself to the case of one-dimensional 2×2 systems of conservation laws and succeeded to make clear the geometrical structure of shock curves for the Riemann problem (with initial data of step functions). Using the structure theory established here we gave a simple argument in the front trucking method and proved the existence of entropy solutions to general Cauchy problems. Besides, we obtained the comparison and existence of entropy solutions to nonlinear anisotropic degenerate parabolic equations with initial-boundary conditions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：エントロピー解，Kinetic 解，非線形退化放物型方程式，リーマン問題，非線形保存型方程式，波面追跡法，関数方程式

1. 研究開始当初の背景

(1) 非線型退化放物型方程式は多孔質媒体内の2層流問題や流体の浸潤問題に現れる。非線形退化放物型方程式に対するコーシー

問題の弱解の一意性問題はVolpert, Hudj-
uer(1969)により解決された。その結果から
30年以上の長い間、初期値・境界値問題の
弱解の一意性問題は未解決であったが、

Carrillo(1999) によって初期値・斉次境界値に対するエントロピー解の一意性が証明された。尚, 弱解とエントロピー解の関係については研究代表者の結果(2003)がある。Mascia, Porreta, Terracina(2002)とMichel, Vovelle(2003)は、初期値・斉次境界値に対するCarrilloの結果を拡張することにより L^∞ 空間内でエントロピー解の一意性・存在性を議論した。さらに、研究代表者(2006)によって L^∞ 空間内でエントロピー解の比較定理が証明された。一般に近似方程式に対するBV評価は期待できないので、 L^∞ 空間枠内での扱いは、数値解析と近似問題の研究においても不可欠なものである。従って、初期値・境界値問題の理論の研究は、それ自身が重要のみならず、数値解析の進展にも大きく関わっている。

(2) 非線形保存型方程式は物理学における基本法則であるエネルギー保存の法則、質量保存の法則などの種々な保存則の数学的モデルである。非線形保存型方程式系の研究は半世紀前から始まり、現在でもなお活発に研究がなされている。非線形保存型方程式系に対するコーシー問題は十分小さいBV初期値に対しては、Bressanを中心とする研究グループによってエントロピー解の一意存在が示されているが、一般のBV初期値に対しては未解決である。非線形保存型方程式系に対するコーシー問題の時空間的な大域解の理論の確立にはショック曲線の大域的存在を示す必要がある。ショック曲線の局所存在については、Lax(1957)によって示されているが、大域的存在については未解決である。これについてはショック曲線が大域的に存在しない例が存在するので、大域的に存在するための条件を発見する必要がある。近似問題・差分近似による数値解析においてもショック曲線が重要な役割をしているので、数値解析の進展においてもショック曲線の研究は重要である。

2. 研究の目的

(1) 非線形退化放物型方程式に対する初期値・境界値問題に対するエントロピー解の構造研究、特に一意性・存在性・安定性理論の研究を行う。これらにおいて適切な境界条件を如何に設定すべきかは興味ある未だ解決されていない問題であるので、適切な境界条件を見出し、その理論の確立を目指す。その理

論により初期値・境界値問題の解の構造が明らかになることで、数値解析への寄与も目的とする。

(2) $n \times n$ 非線形双曲型偏微分方程式系に対するコーシー問題については、特に $n \times n$ 非線形保存型方程式系の研究を行う。 $n \times n$ 非線形保存型方程式系に対するコーシー問題の時空間的な大域解の理論は殆ど未解決であるので、先ず 2×2 非線形保存型方程式系に対しての研究をショック曲線の新しい幾何学的性質を探求することにより研究を行い、解決への糸口を探り、時空間的な大域解の理論の確立を目的とする。

(3) 退化放物型方程式の研究においては、P. L. Lions, Perthame, Tadmor によって導入された(全空間 \mathbb{R}^n 上のコーシー問題に対する)キネティック理論を非等方的退化放物型-双曲型方程式の初期値・境界値問題に対して改良し、測度論、実解析的手法を用いて、エントロピー解の構造理論の確立を目的とする。

(4) 保存則方程式系について、ショック曲線の新しい性質を用いた近似問題・差分近似問題の研究を行う。さらに、ショック曲線の幾何学的解析、波面追跡法、粘性項消滅法を基調とし、かつ発展方程式論的方法を取り入れた研究を進める。

3. 研究の方法

(1) エントロピー解の構造理論構築の達成を次の方法で行った。研究課題についての新しい知見を得るために、文献研究、研究打合せ、情報の収集を行った。非線形退化放物方程式は主として研究代表者が担当した。 $n \times n$ 非線形双曲型方程式系(保存型方程式系)は、研究分担者とH22年度研究協力者(宇宙航空開発機構 JAXA・総合技術研究本部・高橋匡康)と共に研究した。数値解析の研究は、H22研究協力者が差分近似法と有限体積法を中心に研究を行った。

(2) 本研究は、各国、各方面の研究者から専門的知識・協力と最新の研究情報の供与を受け、これらの研究者と研究打合せを行うことにより進めた。具体的には、次の方法で研究を遂行した。

① 非線形退化放物型方程式については、P. L. LionsとPerthameによるキネティック理論を用いて研究を行った。すなわち、双曲型方程式のコーシー問題において開発されたキネティック理論を有界領域における非線形退

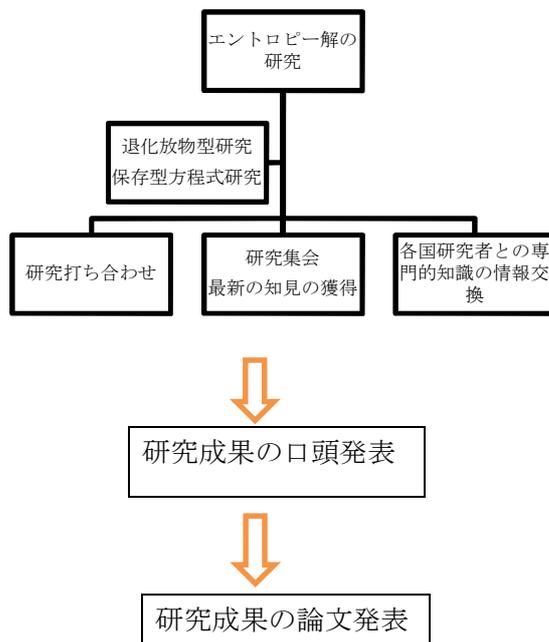
化放物型方程式に対する初期値・境界値問題へ拡張し、その理論の構築を図った。この方面の先駆的研究を進めていたヨーロッパの研究者、特に、Vovelle准教授（フランス）、Otto教授（ドイツ）の研究方法をとった。

② $n \times n$ 非線形双曲型方程式系に対するコーシー問題については、Smoller, Johnsonによるショック曲線の研究を幾何学的、解析的に深めることを努めた。さらに、Bressanによる波面追跡法とBianchini, Bressanによる粘性項消滅法について研究し、その改良を試みることを努めた。

③ 得られた研究成果については、適時に国内・国外の研究集会で公表し、レビューを受け、関連した最新の研究情報の供与を受けた。このための経費として、次の項目を必要とした。

- ・外国の研究者との研究打合せおよび研究成果発表のための外国旅費
- ・国内の研究者との研究打合せおよび研究成果発表のための国内旅費
- ・研究資料および関連図書の購入費
- ・論文執筆の際に必要な経費

○研究計画・方法の関連図



4. 研究成果

(1) n 次元空間 R^n の有界矩形上の非等方的退化双曲-放物型方程式に対する非斉次境界値問題の優エントロピー解と劣エントロピー解の比較定理およびエントロピー解の一意性・存在性の結果を得た（論文⑤）。この結果は、研究代表者により得られていた等方双曲-放物型の場合の結果（2006）を非等方的の場合に拡張している。また、Chen-Perthameにより得られていたコーシー問題の結果（2003）に対する初期値・境界値問題バージョンである。一般の有界領域でなく有界矩形上のみで問題を扱った理由は、方程式の中に現れる非等方的拡散行列に対して課す条件が、空間 R^n の回転変換に関して不変でないので、局所座標系の方法が利用できないからである。一般の有界領域に適用できる理論を構築することは、今後の興味ある問題である。なお、初期値・境界値問題に対する結果としてはこれが最初である。

(2) Riemann問題については、1960年代後半から70年代にかけてのJ. A. SmollerとJ. L. Johnsonによる一連の結果、1972年のV. A. Borovikovによる結果、1978年のB. L. KeyfitzとH. C. Kranzerによる結果が有名である。本研究では、1960年代後半から70年代にかけてのJ. A. SmollerとJ. L. Johnsonによる一連の結果の不備を見つけ反例を示すことでそれを指摘した（論文④）。そして、これらの結果の拡張を意識した方法により再証明を与えた（論文①）。この証明方法は、V. A. Borovikovによる論文やB. L. KeyfitzとH. C. Kranzerによる論文では見られなかった新しい方法である。さらに、この証明方法をさらに拡張することにより、凸性に関する条件を仮定せずにRiemann問題の一意可解性を示した。また、Riemann問題の解の存在については、1970年代前半から後半にかけてのC. M. Dafermosによる一連の結果が有名である。その証明方法は適用範囲がとて広く、現在でも様々な保存則系の解の存在定理の証明に用いられている。特に、本研究では1次元 2×2 保存系のRiemann問題の可解性について、1970年代前半から後半にかけてのDafermosのRiemann問題の解の存在に関する一連の結果における証明方法を用いることで、非線形波動方程式を抽象化した保存則系についての解の存在定理を得た（論文②）。この結果は流束に関する仮定を大幅に緩和している。さらに、流束が狭義単調である場合の保存則系や粘性保存則系にも適用できるように改良した。今後において

様々な非線形偏微分方程式にも応用されることが期待される。

(3) 一般の初期値問題については、1次元 $n \times n$ 保存則方程式系の一般の初期値問の可解性については、1990年代前半から後半にかけての A. Bressan らによる波面追を用いた一連の結果が有名である。しかし、その証明手法は複雑なため理解が難しく、さらには、厳密とは言い難い部分もある。本研究では、1次元 2×2 保存則方程式系の Riemann 問題に関する研究で得られ構造理論を一般の初期値問題に適用することで、1次元 2×2 保存則方程式系に対する波面追跡法の簡略化を行い、その証明を厳密にした(論文③)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

① Hiroki Ohwa, Existence of solutions to the Riemann problem for 2×2 conservation laws, 査読有 *Applicable Analysis*, 92 (2013), 1008-1027.

<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00036811.2011.643785?journalCode=gapa20>

② Hiroki Ohwa, On the existence of strong travelling wave profiles to 2×2 systems of viscous conservation laws, 査読有 *Quarterly of Applied Mathematics*, 71 (2013), 283-288.

<http://www.ams.org/journals/qam/2013-71-02/S0033-569X-2012-01301-0/>

③ Hiroki Ohwa, On the wave-front tracking algorithm for 2×2 hyperbolic systems of conservation laws, 査読有 *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 397 (2013), 172-181.

<http://www.Sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X12006075>

④ Hiroki Ohwa, An example of 2×2 hyperbolic conservation laws admitting delta-shock waves, 査読有 *Nihonkai Mathematical Journal*, 23 (2012), 59-74. <http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.nihmj/1363096198>

⑤ Kazuo Kobayasi and Hiroki Ohwa, Uniqueness and existence for anisotropic degenerate parabolic equations with

boundary conditions on a bounded rectangle, 査読有 *Journal of Differential Equations* 252 (2012), 137-167

DOI:10.1016/j.jde.2011.09.008

⑥ Hiroki Ohwa, Existence of solutions to the Riemann problem for a class of hyperbolic conservation laws exhibiting a parabolic degeneracy, 査読有 *Quarterly of Applied Mathematics*, 70 (2012), 345-356. <http://www.ams.org/journals/qam/2012-70-02/S0033-569X-2012-01254-5/>

⑦ Hiroki Ohwa, On the uniqueness of entropy solutions to the Riemann problem for 2×2 hyperbolic systems of 9 conservation laws, 査読有 *Communications in Mathematical Sciences*, 9 (2011), 161-185.

<http://intlpress.com/site/pub/pages/journals/items/cms/content/vols/0009/0001/00023018/index.html>

⑧ Hiroki Ohwa, The shock curve approach to the Riemann problem for 2×2 hyperbolic systems of conservation laws, 査読有 *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 7 (2010), 339-364.

<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219891610002128>

⑨ Hiroki Ohwa, Some examples of 2×2 hyperbolic conservation laws having the Hugoniot curves with singularities, 査読無, 早稲田大学教育学部学術研究-数学編, 58 (2010), 1-14. (

<http://dspace.wul.Waseda.jp/dspace/handle/2065/5459>

[学会発表] (計3件)

① 應和宏樹, 2×2 双曲型保存則方程式系に対する波面追跡法について, 2013年3月, 日本数学会実函数論分科会, 京都大学. 2013年3月20日~23日

② Kazuo Kobayasi, Well-posedness for anisotropic degenerate parabolic equations with non-homogeneous boundary condition, 9th AIM international conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 1, 2012 - July 5, 2012, Orland, Florida, USA.

③ 應和宏樹, 2×2 双曲型保存則方程式系の初期値問題の可解性について, 2012年6月, 『第86回米沢数学セミナー』, 山形大学. 2012年6月27日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小林 和夫 (KOBAYASI KAZUO)
早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号：80103612

(2) 研究分担者

應和 宏樹 (OHWA HIROKI)
新潟大学・自然科学系・助教
研究者番号：10549158
(平成22, 24年度)
高木 悟 (TAKAGI SATORU)
早稲田大学・付属研究所・助教
研究者番号: 50367017
(平成23年度)