様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月２７日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010 ～ 2012
課題番号：22540236
研究課題名（和文）　量子群の１の冪根における表現とその結び目などへの応用

研究課題名（英文）　Representations of the quantum groups at roots of unity and its application to knot theory

研究代表者
村上　順　（MURAKAMI　JUN）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：90157751

研究成果の概要（和文）：本研究では、量子群 Uq(sl2) に関連する量子不変量と結び目補空間の双曲体積との関係を示す「体積予想」に注目し、関連する研究を行うとともに、この量子群の半単純ではない表現に注目し、この表現と対応する結び目の量子不変量についての研究を進めてきた。そして、体積予想を応用して結び目補空間の幾何構造や、定曲率空間中の多面体の体積に関する公式を得るとともに、半単純ではない表現に対応する、３次元多様体中の結び目に関する新たな不変量を構成した。

研究成果の概要（英文）：We did research rerated to the 'Volume Conjecture' which gives a relation between the quantum invariant related to the quantum group Uq(sl2), and, by noticing the non-semisimple representation of it, such representations and the related knot invariants were studied. By applying the volume conjecture, the geometric structure of a knot complement and the volumes of polyhedrons in a three space with a constant curvature were studied. Moreover, new invariants of knots in a three manifolds were constructed from the non-semisimple representations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1、100、000	330、000	1、430、000
2011 年度	1、000、000	300、000	1、300、000
2012 年度	1、000、000	300、000	1、300、000
年度			
年度			
総　計	3、100、000	930、000	4、030、000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：可積分系、量子群、量子不変量、位相幾何学、作用素環

１．研究開始当初の背景

量子群の１の冪根における表現の研究において、射影加群による表現が、対数的共型場理論と、結び目の量子不変量とその補空間の双曲構造との関係を示す体積予想とに関係することがわかり、半単純ではない表現の性質とその結び目理論や低次元幾何学への応用についての研究を開始した。

２．研究の目的

量子群の表現論、特に１の冪根における射影加群による表現に注目し、その表現論的性質を研究するとともに、その結び目理論や３次元多様体の量子不変量への応用や、位相的量子場の理論、共型場理論などへの応用についても研究する。

３．研究の方法

（１）学会、研究会に参加し、研究成果を発表するとともに、多く研究者と意見交換し、情報収集して研究を進めた。

（２）外国から研究者を招聘し、共同研究を行った。韓国からチョ、スイスからコルパコフ、フランスからマスバームを招聘した。

（３）計算機を用いて、射影加群の実際の構成や、不変量の計算を行い、理論の検証を行った。

４．研究成果

（１）結び目の体積予想の研究

カシャエフにより、結び目のある量子不変量を構成し、結び目補空間の双曲体積と関係があることを見いだした。その後、カシャエフの構成した量子不変量がカラードジョーンズ不変量の特別な場合であることがわかり、カラードジョーンズ不変量と双曲体積との関係が「体積予想」として研究されるようになった。特に、リー環 sl_2 に対応する量子不変量と結び目や３次元多様体の双曲構造との関係が横田により明らかにされ、この関係を用いることで、補空間の体積ばかりでなく、チャーンサイモンズ不変量も量子不変量から得られることが示された。この幾何構造は、同じ量子不変量に対してもその実現法が異なると別の構成法をとるものとなるのだが、チョとの共同研究により、カラードジョーンズに対応する幾何構造が、横田によるカシャエフの量子不変量に対応する幾何構造と同値なものを与えていることを示した。特に、この研究では、チャーンサイモンズ不変量が、通常 2πˆ2 を法として定義されるのであるが、量子不変量から定義すると 4πˆ2 を法として定義できることがわかり、結び目補空間に、位数２の巡回群に値をとる新たな幾何構造の不変量が定義できることが示唆された。これが実際にどのようなものであるかは、今後の研究課題である。

（２）定曲率空間中の多面体の体積の研究

リー環 sl_2 に対応する結び目や３次元多様体の量子不変量と双曲体積や双曲構造との関係を示唆する「体積予想」を、３次元多様体のトラエフビロ不変量に当てはめることで、双曲四面体の体積が量子 6j 記号から計算できることが予想され、以前の八野との共同研究で新たな双曲四面体の体積公式を得ることができていた。この公式は、２重 log 関数を用いて表される、四面体の面角に関する解析関数である。体積を解析関数として表示できると、その解析接続として、双曲四面体を変形して出来る様々な立体の体積に対する公式が得られる。ただし、実際に役に立つ公式を得るためには、２重 log 関数という多価関数に対して、どの分岐をとるべきかの情報を与えなければいけない。そこで、３次元球面中の四面体に対する場合と、一つの辺が双曲空間の外に飛び出して行ってしまったような場合について、対応する解析接続が正確にはどのように表すことができるかを調べた。

まず，３次元球面中の四面体に対する公式を求めた。３次元球面中の立体の体積は、４次元空間における立体角とも呼ぶべきもので、幾何だけでなく、組み合わせ論や確率論においても有用なものである。ここで求めた公式は面角がπ以下の四面体に対して有効で、2πˆ2 を法として定義されるものであるが、2πˆ2 は３次元球面そのものの体積でなり、これを法として定義されるのは非常に自然なことである。ただし、公式自体は複素関数を用いて表現されており、すべてを実数のみで表すことにはまだ成功していない。

また、一つの辺が双曲空間の外に飛び出して行ってしまったような場合とは、ランバートキューブと呼ばれる双曲空間の４角形６枚を境界とする６面体を一般化したもので、元の辺での面角とランバートキューブでの対応する辺の長さとの一種の双対性に注意することで、以前牛島と求めた辺の長さによる四面体の公式と、八野との面角による公式とを会わせたような公式を得ることができた。なお、この研究はコルパコフとの行動研究である。

以上の２種の立体についての体積公式は、特殊な場合については既に知られていたものではあるが、本研究で得られた公式は、どちらも一般の場合すべてに有効な公式で、体積予想の考え方が非常に有用であることを示している。

（３）結び目のカラードアレキサンダー不変量の研究

結び目のカラードアレキサンダー不変量とは、もともとは阿久津・出口・大槻により定義されていたものであるが、村上により sl_2 に対応する量子不変量として捉え直され、双曲体積との関係についても明らかにされていたものである。すなわち、sl_2 に対応する量子群で q が１の冪根になっているものをとると、その最高ウェイトが整では無いような最高ウェイト表現で有限次元なものがある。この表現に関する R-行列からカラードアレキサンダー不変量を定義することができるのである。

そこで、本研究では、最高ウェイトが整では無いような最高ウェイト表現で有限次元なものに注目し、この表現に関する量子 6j 記号の導出を行った。さらに、面模型と呼ばれる、6j 記号を用いたカラードアレキサンダー不変量の構成法を示し、6j 記号と双曲四面体の体積の関係も明らかにした。これま

での量子不変量と双曲体積との関係は、「楽観的極限」という手法により、ある仮想的な計算手法に基づいて示されてきた。それに対し、非整最高ウェイト表現に対応する量子 6j 記号に対しては、適当なスケールリミットがある双曲四面体の体積になることが示された。ただし、この双曲四面体は、切頭四面体という、いってみれば頂点を双曲空間の外に飛ばしたような一般化された四面体であり、実際には頂点のところが、まわりの３面と直交する面で切り取られたようになっている四面体である。また、その面も、切頭三角形となっているのであるが、切頭三角形は弦理論において開弦に対応するリーマン面の三角形分割にも現れるものであり、開弦理論との関係が期待されるものである。

また、ここで定義された 6j 記号は、もともと整でないウェイトを用いて定義されたものであるが、このウェイトを動かして整にした極限においても意味のあるものであり、これまで知られていた整ウェイト表現から定義された量子 6j 記号とは異なる、新たな量子 6j 記号となっており、 6j 記号の研究の元となった、量子重力の研究に対しても新たな研究手段を供するものである。

（４）３次元多様体中の結び目に対するカシャエフ不変量の研究

カシャエフが見つけた双曲体積と関係する不変量がカラードジョーンス不変量の特殊な場合であることがわかると、カラードジョーンズ不変量から体積予想にアプローチする研究が中心となっていたが、上の３での研究から、カシャエフ不変量はカラードアレキサンダー不変量の特殊な場合として捉える方が自然なように思えた。そこで、カラードアレキサンダー不変量の整ウェイトでの極限値が何かを調べるうちに以前の永友との共同研究により、対数的共型場理論と関係する不変量として捉えると自然であることがわかった。さらに調べると、この不変量は、ヘニングス不変量と呼ばれる、有限次元ホップ代数の性質から定義される不変量と近いものであることがわかったので、ヘニングス不変量と、対数的共型場理論と関係する不変量とを組み合わせることで、３次元多様体中の結び目に対する、新たな量子不変量を構成した。

この不変量は、３次元多様体を３次元球面とすればカシャエフ不変量を含むものであり、また、カシャエフ不変量と同様、その３次元多様体中の結び目の補空間の双曲体積と関係があることがわかってきた。カシャエフ不変量を３次元多様体中に拡張する試みはカシャエフ自身の試みを始めいくつかあるが、実際に双曲体積との直接的関係が示されたのはこの不変量が初めてのものである。

この研究に関しては、論文を準備中であるが、国際学会、研究会等では報告を行っている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

①Costantino, Francesco; Murakami, Jun, On SL(2, C) quantum 6j-symbol and its relation to the hyperbolic volume, Quantum Topology, 査読有, 掲載予定

② Cho, Jinseok; Murakami, Jun, Optimistic limits of the colored Jones polynomials, Journal of the Korean Mathematical Society, 査読有, 掲載予定

③ Kolpakov, Alexander; Murakami,Jun, Volume of a doubly truncated hyperbolic tetra- hedron, Aequat. Math. 電子速報版, 査読有, 2012, DOI 10.1007/s00010-012-0153-y

④Murakami, Jun, Volume formulas for a spherical tetrahedron, Proc. Amer. Math. Soc. Vol.140, no.9, 2012, pp.3289-3295

⑤Cho, Jinseok; Murakami, Jun, The complex volumes of twist knots via colored Jones polynomials, J. Knot Theory Ramifications, 査読有、Vol.19, no.11, 2010, pp.1401-1421

〔学会発表〕（計９件）

① 村上順, On the logarithmic knot invariants and the hyperbolic volume, Low dimensional topology and number theory V, ２０１３ 年3月１１日～１４日（発表１４日）, ソフトリサーチパーク（福岡）

②村上順, Logarithmic invariants of knots in three manifolds,Exact results in SUSY gauge theories and integrable systems, ２０１３年1月 １２日～１４日(発表１２日), 立教大学

③村上順, Quantum 6j-symbols for non-integral highest weight representations of U_q(sl_2) at root of unity, 日本数学会秋期総合分科会, ２０１２年9月１９日, 九州大学

④村上順, 結び目の量子不変量とその応用, Summer School 数理物理 2012 結び目の数理と物理, ２０１２年9月７日～9月９日, 東

京大学

⑤村上順, Logarithmic invariants for knots in three manifolds, 研究集会 ホップ代数と量子群--応用の可能性, ２０１２年９月３日, 京都大学数理解析研究所

⑥村上順, Quantum invariants of knots and the hyperbolic volume, The 29th international colloquium on group-theoretical methods in physics, ２０１２年８月２４日, Chern Institute of Mathematics, 天津, 中国

⑦村上順, ３次元球面内の四面体の体積公式, 日本数学会秋期総合分科会, ２０１１年９月３０日, 信州大学

⑧村上順, On the relation between projective representations of U_q(sl_2) and hyperbolic volume, Diatram algebas and related topics, ２０１０年７月７日, Culture Resort Festone, 沖縄

⑨村上順, Some generalizations of the colored Alexander invaiant, Quantum groups and quantum topology, ２０１０年４月２０日,京都大学数理解析研究所

〔その他〕
ホームページ等
http://www.f.waseda.jp/murakami/jun-home-j.html

６．研究組織
(1)研究代表者
村上　順 (MURAKAMI JUN)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：９０１５７７５１