様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：８２７２３
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４０２４０
研究課題名（和文）複素力学系の視点による有理関数のモジュライ空間の解析

研究課題名（英文）Analysis of the moduli space of rational maps from the point of view of complex dynamics

研究代表者
藤村　雅代（Fujimura, Masayo）

防衛大学校（総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工・総合教育学群・講師

研究者番号：００５３１７５８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,300,000円、（間接経費）　510,000円

研究成果の概要（和文）：複素力学系の理論に応用するため、有理関数のメビウス共役類全体からなる空間であるモジュライ空間の忠実な表現を与えることが、研究目的の一つである。本研究により、ある表現空間とそのコンパクト化の一つを与えることができた。さらに、Goldberg の問題（特異点集合に対応する有理関数の同値類の個数を決定する問題）に関しても、一般ベル表現の導入に成功し、この問題の解き方への新たな道筋を与えるとともに、数式処理システムを利用することで低次の場合に厳密な解を与えることができた。

研究成果の概要（英文）：One of the aim of this research is to give a faithful representation to the moduli space of rational maps, in order to apply to the theory of complex dynamical systems. For the moduli space of rational maps, a representation space and its compactification were obtained as one of the results of this research. Moreover, I solved problems of Goldberg that determine the number of Moebius equivalence classes corresponding to each sets of critical points explicitly when the degree is small.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：解析学　複素力学系　数式処理　有理関数　モジュライ空間

１．研究開始当初の背景

(1) 多項式の複素力学系の研究では、多項式の係数をパラメータとした空間が利用されている。次数が 2 次の場合はこの空間は単に係数によるパラメータ空間としてだけでなく、アフィン共役類全体からなるモジュライ空間としてもとらえることが出来る。しかしながら、3 次以上の場合は多項式の係数をパラメータとするパラメータ空間は力学的性質をうまく反映していない。その解決の一つとして、1993 年に Milnor は 2 次有理関数のモジュライ空間に対して不動点の乗数によるパラメータ表現を用いることに成功した。

研究代表者の藤村は、この乗数によるパラメータ表現を、多項式の場合に適用することを考えた。具体的には、n 次多項式のモジュライ空間から$\mathbb{C}^{n-1}$への写像を、モジュライ空間の各点に不動点の乗数の基本対称式を対応させるものとして定める。このとき、2 次の場合と同様に、3 次の場合にもこの写像は全単射であることはすぐわかるが、藤村は、2007 年に 4 次の場合に写像は全射でも単射でもないことを示した。$n\,(n \geq 4)$ 次の多項式には、$\mathbb{C}^{n-1}$上にモジュライ空間に点が対応しない部分である除外集合が存在し、その上で多項式が退化すると考えられる。この現象を可視化するために、n 次多項式のモジュライ空間を自然に含む拡張モジュライ空間を導入し、先述の写像の拡張となる写像が複素射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$への全射になるという基本的な事実を 2006 年に証明した。また、2008 年に拡張モジュライ空間が、モジュライ空間のコンパクト化になっていることを示した。

モジュライ空間のコンパクト化については、より力学系的視点から 2008 年に DeMarco と McMullen による tree 構造を用いたモジュライ空間のコンパクト化の研究も行われている。このように、本課題研究の開始当時は複素力学系への応用を視野にした多項式のモジュライ空間についての研究が活発に進められていた。

(2) 一方、有理関数のモジュライ空間に関しては､2 次の場合の前述の Milnor の研究と、2 次のモジュライ空間のコンパクト化に関する 2007 年の DeMarco の研究が知られていた。しかし、一般の次数に関して、力学的不変量によるモジュライ空間の表現が知られておらず、具体的な力学系の分類の研究は進んでいなかった。

(3) さらに、有理関数については、多項式の場合の monic & centered な族のような、モジュライ空間の次元と同じ個数の係数パラメータによって、すべての共役類を記述する表現法(グローバルパラメータ) は 2 次の場合でさえ知られていなかった。そのため、よく研究で使われている fixed-point normal form や critical-point normal form などの normal form でさえ例外となる有理関数の共役類が存在していた。

２．研究の目的

本研究の目的は複素一変数の有理関数から得られる力学的性質を解析し、そのような写像が与える力学系を分類するための基礎となるパラメータ空間を作ることである。具体的には、次のことを解明することを目標にする。

(1) 有理関数のモジュライ空間に関して、新しい力学的不変量を導入して、複素力学系の研究への応用が可能なパラメータ化を行う。この問題に関しては、1987 年の McMullen による周期点の乗数に関する研究や 1998 年の Silverman による研究も知られているが、3 次以上の有理関数に関して力学系の研究への応用が可能な決定的な結果はないため、解決できれば有理関数の力学系の研究の進展に資するものになる。

(2) 有理関数の退化現象を解析する。多項式の退化現象は 2008 年にほぼ解明させたが、有理関数の場合はそれよりはるかに複雑な現象が起こることが予想される。これは、有理関数と多項式の差異を明らかにする手がかりとなるだけでなく、本研究の次のステップとして行うこととなる有理関数のモジュライ空間のコンパクト化を与えるうえでも、必要不可欠な基礎となる研究である。

３．研究の方法

本研究では、数式処理システムを用いた実験を行い、その結果を数学的に定式化し証明することにより目的の達成を目指すという手法を用いた。藤村はこれまでの研究で既に、複素力学系の問題を数式処理システムで計算可能な形に変形する手段をいくつか確立している。まずは、それらを本研究に対しても適用を試みた。既知の手法の適用ができない問題に対しては、数式処理の研究集会などで最新の知識や手法を入手することで新たな計算法を模索した。

研究内容も有理関数のモジュライ空間に関するものだけにとどまらず、類似の空間における問題を並行して研究することで、双方の研究を共に発展させた。

共同研究者とは研究連絡を定期的に行い、研究が円滑に進められるよう努めた。また、関連分野の研究集会に出席し情報収集を行った。研究集会では得るのが難しい情報は専門家を招聘して研究会を開くことで入手に努めた。

得られた研究成果は、研究集会などで発表を行うと共に、論文にまとめて投稿することで公刊した。さらに、成果発表することで関連分野の研究者から得られたコメントなどをもとに、その後の研究をさらに発展させていった。

４．研究成果

(1) 奈良女子大の谷口雅彦氏と有理関数のモジュライ空間へ座標を導入する共同研究を

行った。本課題の研究に先立って行ってきた、有理関数のすべての共役類を記述できる係数パラメータの導入と、有理関数の各不動点とその正則指数に対応する共役類の次元に関する問題 (Milnor, Dynamics in one complex variable 3rd. ed., (2006)) への解答を与える成果が、この課題研究を始めた直後に得られ、AMS の雑誌
Stratification and coordinate systems for the moduli space of rational functions, *Conformal Geometry and Dynamics*, **14** (2010), 141-153.
に掲載された。この研究とは違う視点からモジュライ空間の表現に関する研究を行い、その表現空間とそのある種のコンパクト化に関する成果が得られた。この成果については現在学術雑誌に投稿中である。

(2) Kabur 大の Mohaby Karima 氏、谷口氏と Goldberg の問題についての共同研究を行った。Goldberg の問題は与えられた点の集合に特異点を持つ有理関数の同値類の個数を決定する問題である。Goldberg 自身は 1991 年にジェネリックな場合その個数がカタラン数で与えられることを示した。さらに、2002 年に Scherbak は共役類の個数が退化する部分も求めたが、解を与えられたのはジェネリックな部分のみであった。本共同研究では厳密解を求めることを目標とし、彼らとは違うアプローチを試みた。まず、同値類の空間のジェネリックな部分においては、いわゆる有理関数の Bell 表現を用いることで解析が行えることが分かり、実際に低次の場合に数式処理システムを用いて共役類の個数を求めた。この成果は数式処理分野の論文誌
The Bell locus of rational functions and problems of Goldberg, *Communications of Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation*, **1** (2012), 67-74.
に掲載された。さらに、一般 Bell 表現 (generalized Bell representation) というものを導入することにより、同値類の空間全体のパラメータ化に成功し、低次な場合についての厳密解を得ることができた。この成果については、国際会議で発表を行い、その Proceedings である
The generalized Bell locus of rational functions and problems of Goldberg, *Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, Proceedings of the 19th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications*, (2013), 103-110.
に掲載された。さらにこの問題を射影化し、変形することで数式処理システムでの計算をより容易にできるようにした。また、この変形により特異部分の構造がより詳細に分かるようになった。この成果については IMI 共同利用研究集会で口頭発表し
Solving problems of Goldberg for rational maps on the projective space, *COE Lecture note, Development of Computer Algebra Research and Collaboration with industry*, **49** (2013), 1-6.
に内容を掲載した。

(3) 防衛大の後藤泰宏氏、防衛研究所の吉田怜史氏と Julia 集合描画の DEM (Distance Estimator Method) アルゴリズムの式評価に関する共同研究を行った。DEM アルゴリズムは Fisher らにより 1998 年に導入された多項式の Julia 集合のε-近傍を描くアルゴリズムであるが、Böttcher 写像の近似列の収束の性質を用いているため精度の評価を行うのが困難であった。この共同研究では双曲距離を用いて距離の近似式の再構成を行い、DEM アルゴリズムの具体的な精度の計算を可能にした。ここで得られた評価式の上からの評価は最良である。この成果に関しては、
Explicit estimates on distance estimator method for Julia sets of polynomials, *Kodai Mathematical Journal*, **36** (2013), 491-507.
に掲載された。我々は下からの評価も最良であると予想している。すなわち、Fig.1 のように無限遠の収束鉢に核収束の意味で円板に任意に近いものがとれる Julia 集合が存在すると予想している。

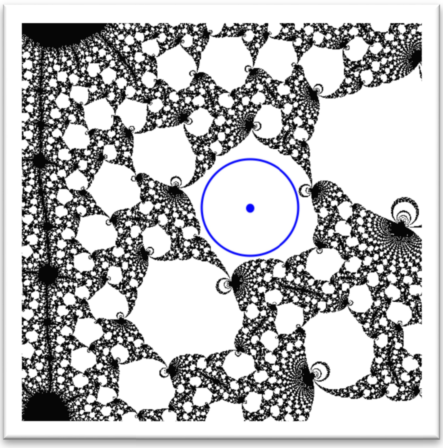

Fig. 1

(4) 谷口氏、奈良女子大の院生の青木氏と反復関数系に関する共同研究を行った。反復関数系に関して connectedness locus の研究はよく知られている。しかしながら、極限集合が塵集合 (dust-like) になることが様々な応用に使われるにもかかわらず、dust-likeness locus の研究は知られていなかった。ここでは dust-likeness locus に焦点をあてて研究を行い、いくつか興味深い結果が得られた。得られた成果は、EMS の論文誌
The shape of the dust-likeness locus of self-similar sets, *Journal of Fractal Geometry*.
に掲載予定である。

(5) Blaschke 積の軌道や逆像のもつ幾何学的

性質についての研究を行った。Blaschke 積は単位円板上で正則な有理関数であるが、その境界上の点の逆像に関する幾何学的性質は 2002 年に Daepp, Gorkin, Mortini によって、また、前方軌道についての性質は 2004 年に Frantz によって与えられている。彼らの結果を統合することで、双心三角形についての古典的な定理である Chapple の定理 (1746 年) の拡張を与え、さらに、新たに研究から得られた結果をもとに、双心四角形についての古典的な定理である Fuss の定理 (1797 年) の拡張を与えることができた。この成果は
Inscribed ellipses and Blaschke products, *Computational Methods and Function Theory*, **13** (2013), 557-573.
に掲載された。Fig.2 の右の図は、Fuss の定理の拡張のカギとなるある性質を持つ Blaschke 積から生じる楕円を包絡線として表現し、その楕円を内接する四角形を描いたものである。

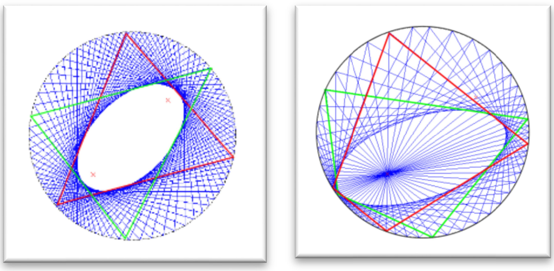

Fig. 2: Blaschke 積から生じる楕円と、それを内接する単位円周上に頂点を持つ三角形(左)と四角形 (右)。

5．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5　件）

① Miwa Aoki, Masayo Fujimura, and Masahiko Taniguchi, The shape of the dust-likeness locus of self-similar sets, *Journal of Fractal Geometry*, accepted. [査読あり]

② Masayo Fujimura, Inscribed ellipses and Blaschke products, *Computational Methods and Function Theory*, **13** (2013), 557-573.　[査読あり]
doi:10.1007/s40315-013-0037-8

③ Masayo Fujimura, Yasuhiro Gotoh, and Satoshi Yoshida, Explicit estimates on distance estimator method for Julia sets of polynomials, *Kodai Mathematical Journal*, **36** (2013), 491-507. [査読あり]
doi:10.2996/kmj/1383660695

④ Masayo Fujimura, Mohaby Karima, and Masahiko Taniguchi, The generalized Bell locus of rational functions and problems of Goldberg, *Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, Proceedings of the 19th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications*, (2013), 103-110. [査読あり]

⑤ Masayo Fujimura, Mohaby Karima, and Masahiko Taniguchi, The Bell locus of rational functions and problems of Goldberg, *Communications of Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation*, **1** (2012), 67-74. [査読あり]
http://www.jssac.org/Editor/CJssac/V01/V01_104.pdf

〔学会発表〕（計　18　件）

① 藤村 雅代, Blaschke 積のなす包絡線と Fuss の定理の拡張, Risa/Asir Conference 2014, 神戸大学 (兵庫県、神戸市), 2014 年 3 月 6 日.

② Masayo Fujimura, Blaschke products and bicentric polygons, 「等角写像論・値分布論」合同研究集会, 法政大学 (東京都, 千代田区), 2014 年 1 月 11 日.

③ Masayo Fujimura, Solving problems of Goldberg for rational maps on the projective space, IMI 共同利用研究集会 数式処理研究と産学連携の新たな発展, 九州大学 (福岡県, 福岡市), 2013 年 8 月 21 日.

④ 藤村 雅代, 有理関数のモジュライ空間のグローバルパラメータについて, 日本数式処理学会第 22 回大会, 防衛大学校 (神奈川県, 横須賀市), 2013 年 6 月 7 日.

⑤ 藤村 雅代, 複素平面上の幾何と数式処理, Risa/Asir Conference 2013 + 第 5 回六甲博多計算代数会議, 神戸大学 (兵庫県, 神戸市), 2013 年 3 月 16 日.

⑥ 藤村 雅代, ブラシュケ積の幾何学的性質と計算実験, 第 5 回日本数式処理学会基礎理論分科会＆システム分科会合同研究会, 京都大学 (京都府, 京都市), 2012 年 12 月 27 日.

⑦ 藤村 雅代, ブラシュケ積の幾何学的性質と双心多角形, 数学ソフトウェアとフリードキュメント XV, 九州大学 (福岡県, 福岡市), 2012 年 9 月 17 日.

⑧ Masayo Fujimura, The explicit descriptions of the ramification loci for the problems of Goldberg, 京都大学数理解析研究所研究集会　数式処理研究の新たな発展, 京都大学数理解析研究所 (京都府, 京都市), 2012 年 7 月 4 日.

⑨ Masayo Fujimura, Chapple's formula and Blaschke products, 日本数式処理学会第 21 回大会, 山口大学 (山口県, 山口市) , 2012 年 6 月 8 日.

⑩ 藤村 雅代, Chapple-Euler の定理の別証明とその拡張, Risa/Asir Conference 2012 + 第 4 回六甲博多計算代数会議, 神戸大学 (兵庫県, 神戸市), 2012 年 3 月 21 日.

⑪ Masayo Fujimura, An extension of Chapple-Euler theorem, 第 4 回日本数式処理学会基礎理論分科会＆システム分科会合同研究会, 仙台青葉カルチャーセンター (宮城県, 仙台市), 2012 年 1 月 21 日.

⑫ Masayo Fujimura, The generalized Bell locus of rational functions and problems of Goldberg, The 19th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2011 年 12 月 12 日, Hiroshima (Japan). [invited]

⑬ 吉田 怜史, 藤村 雅代, 後藤 泰宏, d 次多項式の Julia 集合の描画アルゴリズムとその精度評価, 日本数式処理学会第 20 回大会, 神戸大学 (兵庫県, 神戸市), 2011 年 9 月 9 日.

⑭ 吉田 怜史, 藤村 雅代, 後藤 泰宏, Julia 集合の描画アルゴリズムの精度評価, 京都大学数理解析研究所研究集会　数式処理研究の新たな発展, 京都大学数理解析研究所 (京都府, 京都市), 2011 年 7 月 6 日.

⑮ 吉田 怜史, 藤村 雅代, 後藤 泰宏, Julia 集合の描画アルゴリズムと双曲距離, Risa/Asir Conference 2011, 神戸大学 (兵庫県, 神戸市), 2011 年 3 月 21 日.

⑯ Masayo Fujimura, Computer experiment on solving Goldberg's problem, Risa/Asir Conference 2011, 神戸大学 (兵庫県, 神戸市), 2011 年 3 月 21 日.

⑰ Masayo Fujimura, On the problem of Goldberg for the rational maps, 京都大学数理解析研究所研究集会　Computer Algebra -- Design of Algorithms, Implementations and Applications, 京都大学数理解析研究所 (京都府, 京都市), 2010 年 12 月 2 日.

⑱ 吉田怜史, 藤村雅代, 後藤泰宏, Boettcher 関数の構成による Julia 集合の可視化, 京都大学数理解析研究所研究集会　数式処理研究の新たな発展, 京都大学数理解析研究所 (京都府、京都市), 2010 年 7 月 9 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

藤村　雅代（Fujimura Masayo）
防衛大学校・総合教育学群・講師
研究者番号：00531758

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし