

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 12 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540270

研究課題名(和文) 厳密くりこみ群によるゲージ論の研究

研究課題名(英文) Gauge symmetry in exact renormalization group

研究代表者

伊藤 克美 (Itoh, Katsumi)

新潟大学・人文社会・教育科学系・教授

研究者番号：50242392

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：厳密くりこみ群(ERG)を用いてゲージ論を扱ったときに生じる諸問題を研究した。ERGでは運動量切断の導入が本質的であるが、これはゲージ対称性と相容れない。しかし、対称性は変形されて存在し、ゲージ不変である条件は量子マスター方程式(QME)として書かれる。本研究では以下の事柄を明らかにした。1) ERGにおいて、アノマリーはQMEの破れとして現れること。また、アノマリーに関わる代数的構造の現れ方。2) QMEの条件を部分的に解いた作用を用いてフロー方程式を調べた。ゲージ場の2点関数については、運動量切断存在下で、運動量依存性が完全に求まる場合があることを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：When we study a gauge theory in the exact renormalization group (ERG) method, we encounter various problems owing to the fact that the momentum cutoff introduced is not compatible with the standard gauge symmetry. However, the symmetry survives in a modified form that depends on the regularization and its presence is expressed as the quantum master equation (QME) in the anti-field formalism. In the present project, the following results are obtained. 1) We showed that an anomaly, if it presents, appears as a breaking term in the QME. Related algebraic properties are also clarified. 2) The condition of QME can be solved partially to restrict the Wilson or the effective average action. RG flow equations are obtained for the actions that satisfy the condition. This is a novel way to treat the gauge symmetry in the ERG. In particular, the gauge two point function can be obtained explicitly in a full momentum dependent manner even in the presence of a finite cutoff.

研究分野：素粒子論

キーワード：非摂動的場の理論 厳密くりこみ群 ゲージ対称性を尊重する汎関数くりこみ群

1. 研究開始当初の背景

厳密くりこみ群は90年代中頃から活発に研究されるようになった研究領域である。経路積分において運動量切断を導入し、場を運動量殻ごとに分け、その高い領域から経路積分を行ったときの作用の変化を追いかけることを通じて場の理論を非摂動的に定義する。場の理論の非摂動的扱いとしては格子理論に比べ若い手法であるが、それぞれ相補的な役割を果たすものと期待される。

しかしながら、厳密くりこみ群には大きな弱点がある。運動量切断の導入がゲージ対称性と相容れないことである。これは難しい問題であり、決定的な解答は今に至るまで見つかっていない。この問題が我々の研究課題の主なテーマである。

研究を開始した頃に、他の研究グループの成果として知られていたことは、(1) 有効平均作用 (Wilson 作用を Legendre 変換したもの) に対して、ゲージ対称性の存在条件として修正された Slavnov-Taylor 恒等式が書かれていたこと、(2) 厳密くりこみ群においても、ある種類の物質場の組み合わせについてゲージ不変な正則化の導入のできること (ただし、非摂動的な扱いまで行うのは困難) などである。

また、我々自身の研究の成果としては、(1) Wilson 作用がゲージ対称性を維持していること、(2) このときに用いた反場形式の一般論から、運動量切断存在下での BRST 対称性の具体的な表式、(3) ゲージ対称性を議論するに当たって、Wilson 作用、有効平均作用それぞれを用いるやり方の等価性とその具体的な関係式、などがあり、これらは Prog. Theor. Phys. Suppl. の一巻、Realization of Symmetry in the ERG Approach to Quantum Field Theory として出版していた。

2. 研究の目的

運動量切断の導入によって一見壊れてしまうゲージ対称性が、変形を受けながら維持されることを、フォーマルには明らかにできた。これは格子理論という正則化がカイラル対称性と相性が悪いが、実は変形されたカイラル対称性として残っているという近年の理解と同様のものである。

本研究の課題は、このような対称性の現れ方に伴う諸問題の理論的解明と、実用的な計算に耐える近似法の提案を目指すものである。具体的には以下のような課題である。

(1) 我々の得た QME とアノマリーの関係を明らかにすること。

(2) QME を満たす有効作用の構成法を見出すこと、さらに、その有効作用を用いてくりこみ群のフローを調べることである。

有効作用の構成法について、ゲージ対称性より簡単なグローバル対称性において検討しておくのは有用であるので、カイラル対称性

についても、同様の問題を考える。

厳密くりこみ群の手法で用いられる2つの作用がある。ゲージ対称性を議論するには BRST 対称性を代数的に議論できる Wilson 作用が便利である。一方で、有効平均作用はそれの従うフロー方程式が簡単な 1-loop の構造をしていることが強みで数値計算などに多用されている。

本研究は、ゲージ論において、これら2つの作用の強みを生かした実用に耐える計算方法を見出すことを目的としている。

3. 研究の方法

(1) 反場形式による対称性の記述では、対称性の存在は Wilson 作用に対する QME という形で表される。これを有効平均作用について書き直すと、修正された Slavnov-Taylor 恒等式 (mST id.) を得る。さて、運動量切断をゼロに持っていくと、経路積分を全ての運動量領域について行った通常の場の理論を得ることになるが、このとき、mST id. は、Zinn-Justin 方程式に移行することが容易に分かる。アノマリーの存在する理論では、Zinn-Justin 方程式が成立せず、アノマリーを含む項が余分に生じ、また、この項は Wess-Zumino 条件と呼ばれる代数関係を満たしていることが知られている。この代数関係と、反場形式に自然に存在する正準形式との関係を見出すことで、アノマリーの表れ方を理解する。

(2) QME を満たす作用を構成するには、QME を実際に解く必要がある。我々はカイラル対称性を持つ系、また、ゲージ論の最も簡単な例である QED についてこれを検討することにした。

フォーマルなレベルの一般論では、対称性の存在と厳密くりこみ群のフローの間には矛盾がなく、ある運動量切断で対称性があれば、より低い運動量切断でも対称性が維持されることは容易に示すことができる。このことは、作用を場の数で展開したときに無限個の項が存在することで実現していると思われる。しかし、実際的な計算に用いる作用は、特定の項を選び出したもの、多くの応用においては有限個の項を持つものになると思われる。このために、対称性を維持しながらフローの方程式を追うことが困難になると理解される。

以上のことを具体的に検討しながら、作用の構成を行う。

4. 研究成果

(1) Wilson 作用と有効平均作用は Legendre 変換を通じて関係がついている。この関係を通じて、QME と mST id. にも関係がつく。くりこみ群のフロー方程式に対しての性質によって定義される複合演算子という概念があるが、QME、mST id. のいずれも複合演算子である。Zinn-Justin 方程式との関係で期待された通り、アノマリーの存在する系

では、QME、mST id.のいずれも成立せず、アノマリーの寄与を含む余分な項が現れる。この項はまた複合演算子の性質を持ち、アノマリー複合演算子と呼ぶのがふさわしいものである。QME に現れる演算子の組み合わせをQME 演算子と呼ぶ。この演算子は、反場形式に由来した簡単な代数的構造を持っている。この構造を1PIの言葉に書き直し、運動量切断をゼロに持って行った極限で、良く知られたWess-Zumino関係式とつながっていることが理解された。

(2) QME を満たす有効作用の構成については、カイラル対称性、QED の二つの場合について研究した。

カイラル対称性は、ゲージ対称性と異なり、運動量切断の導入によって必然的に壊れてしまうことはない。運動量切断の導入のために使われる正則化関数の選び方に依る。あえて、カイラル対称性を壊す正則化関数を選んで見ると、格子理論で知られているGinsparg-Wilson関係式に似た関係式が得られる。ゲージ対称性の場合の困難は、対称性と相性の良い正則化関数が見当たらないということである。

ゲージ対称性を考えるための思考実験として、カイラル対称性を持つ系を考えているので、あえて相性の悪い正則化関数を選び、QME を解いた。カイラル対称性を持つ系として、フェルミオンと複素スカラー場から成る線形シグマ模型をとった。摂動論によらずに一般的な解が求まりその性質を調べた。場の変換は非線形なものとなり、QME の成立は作用の変換と経路積分測度の変換分の相殺で成り立っている。これらの解のあるカテゴリーのものは、場を変換することで線形なカイラル変換をする理論に書き換えることができ、格子理論で知られるLuescher対称性と似た変換になっていることを明らかにした。

QED について明らかにした事柄については以下に記述する結果を得て、いくつかの研究会などで発表し、現在論文の執筆を進めている。QED に関する研究はハイデルベルク大学のJan Pawłowski氏との共同研究として行っている。

議論を簡単にするために、フェルミオンの質量をゼロとし、系はカイラル対称性を持つものとしている。

厳密くりこみ群における作用は、運動量切断の値以上の運動量をもった場のモードについて経路積分を実行して得たものである。作用の中には運動量切断以上のモードのダイナミクスが織り込まれている。作用に現れる係数にも、通常の場の理論の扱いの意味で言えばループの効果が入っていると考えるべきである。

QME は作用の変換と経路積分測度の変換分が相殺する形をしている。特に後者の項は1-loopの構造を持ち、運動量積分が入っている。

QED に対するQME を場で展開すると無限個の項のあることは容易に理解される。これらのすべてを扱うことは不可能であるので、この展開において場の次数の低い項を書き出して見ることにした。簡単のためにQMEにおいて反場をゼロとしたもの、つまり、Ward・高橋恒等式(WT id.)を検討した。

最初の項は、ゲージ場の縦波成分に対する条件を与える。縦波成分を正則化関数を用いて与えている式で、運動量切断の導入によってゲージ場の持つ質量を決めるものとなっている。通常の扱いでは、微分展開を用いてこの式の近似式を求めることが多いが、我々はこの式を用いて縦波成分を陽に計算できてしまうことに気づいた。正則化関数を指数関数型のものを選ぶと、関係式に現れる積分が実行でき、縦波成分が、運動量切断の値と運動量に依存したものと表すことができる。

QME における第2の関係式はより複雑である。treeと1-loopの項の和になっており、treeの項は通常の摂動論で知られている波動関数くりこみの関係式のような形をしている。一方で、1-loopの項はWilson作用の4体フェルミ相互作用を用いたループ積分を含むものとなっている。

WT id.から得られる以上の2つの関係式は、良く行われるWilson作用の場の次数についての切断に依存せずを得ることができる。つまり、2つの関係式は厳密なものである。

第2の関係式からはいくつかのことが読み取ることができる。最も重要なことは、作用の各項の運動量依存性を維持しないと関係式を満たすことはできない、ということである。

90年代から厳密くりこみ群という研究分野が発展する中で、微分展開の手法が多くこの系で用いられてきたが、近年、微分展開を超える近似の模索が始まっている。スカラー理論において形状因子を持った作用についてフロー方程式を解く近似法が提案されているほか、数値計算手法の発展によって、運動量依存性を議論することも可能になっている。上述の我々の考察は、別の観点から運動量依存性を考慮することの重要性を主張するものと理解される。

第2の関係式の成立には、良く知られたカイラル対称な4体フェルミ相互作用のほか、微分項を持つ4体フェルミ相互作用の必要である。従って、ループ項は、3つの4体フェルミ相互作用項と、ゲージ場、正則関数を含む積分を含むものとなっている。

第2の関係式から一般的な解を求めることは難しく見えたので、2つの仮定をおいた。

treeと1-loopの寄与は独立に消えること、フェルミオン2体、ゲージ相互作用には余分な運動量依存性がなく、くりこみ定数のみを考えれば良い、というものである。この仮定をおくと、treeの寄与は良く知られたくりこみ定数の関係式となる。loopの

寄与の相殺からは、3つの4体フェルミ相互作用をゲージ場の伝搬子で表す2つの関係式を得た。

対称性の条件だけからは、ゲージ場の伝搬子の横波成分、従って4体フェルミ相互作用も決まらない。フローの方程式の情報が不可欠である。厳密くりこみ群においては、対称性の条件とフローの方程式の2つを満たすことでゲージ理論のダイナミクスが決定される。そのような理論の構成からこれは当然のことである。

この段階で作用の形を、良く使われる場の次数による切断を用いて、ゲージ相互作用と4体フェルミ相互作用を持つものと仮定して与えた。

この作用を用いてフローの方程式を考察した。フロー方程式において、ゲージ場の2体の項について両辺を比較すると、縦波成分、横波成分それぞれに関係式が得られる。異常次元を無視する近似の範囲でこれらを求めると、縦波成分については対称性の条件から得たものと一致し、さらに、横波成分についても運動量切断と運動量で書かれた閉じた式として与えることができることがわかった。縦波成分の一致は、我々の計算の非自明なチェックとなっているものと理解している。

現在、ゲージ相互作用、4体フェルミ相互作用についてのフロー方程式も書き出し、簡単な数値計算を行う準備が整ったところである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 5 件)

(1) 園田英徳,
Renormalization for free harmonic oscillators,
Phys. Rev. D89 (2014) 047702. 査読有 .

(2) 園田英徳,
Solving RG equations with the Lambert W function,
Phys. Rev. D87(2013)085023. 査読有 .

(3) 園田英徳,
Phase structure of a three-dimensional Yukawa model,
Prog. Theor. Phys.126, (2011) pp57-80. 査読有 .

(4) 越後弥大、五十嵐尤二,
Realization of Chiral Symmetry in the ERG,
Prog. Theor. Phys.125, (2011) pp709-728. 査読有 .

(5) 五十嵐尤二、伊藤克美、園田英徳,
Anomalies in the ERG Approach,
Prog. Theor. Phys.125, (2011) pp565-580. 査読有 .

〔学会発表〕(計 11 件)

(1) 五十嵐尤二,
Functional renormalization group and gauge symmetry in QED,
日本物理学会、2015年3月21日-24日、早稲田大学

(2) 伊藤克美
Gauge symmetry and the functional renormalization group,
Sakata Memorial KMI Workshop on “Origin of Mass and Strong Coupling Gauge Theories” (SCGT15),
March 3 - March 6, 2015, Sakata-Hirata Hall, 名古屋大学

(3) 伊藤克美
ゲージ対称性と汎関数くりこみ群

研究会「素粒子論の展望:80年代、90年代から未来へ」

2015年2月14日 大阪大学

(4) 園田英徳
Renormalization for Harmonic Oscillators,
International Conference on New Trends in Field Theories,
01-05 November 2014, Banaras Hindu University, Varanasi, India.

(5) 伊藤克美
Gauge Symmetry and the Functional Renormalization Group,
International Conference on New Trends in Field Theories,
01-05 November 2014, Banaras Hindu University, Varanasi, India.

(6) 五十嵐尤二
Functional Renormalization Group approach and gauge symmetry in QED

Workshop “Strings and Fields”, 2014年7月22日-26日、京都大学基礎物理学研究所

(7) 園田英徳
On the universality of critical exponents,

“ERG2014” (7th International Conference on the Exact Renormalization Group) 22-26 September 2014, Lefkada, Greece.

(8) 伊藤克美
Functional RG and a solution to the modified WT identity for QED,

“ERG2014” (7th International Conference on the Exact Renormalization Group) 22-26 September 2014, Lefkada, Greece.

(9) 伊藤克美

非摂動くりこみ群におけるフロー方程式とゲージ対称性、

日本物理学会、2013年9月20日-23日 高知大学

(10) 伊藤克美

Realization of Symmetry in the ERG Approach、

研究会「弦理論・場の理論における非摂動的な手法」、2012年2月19日-21日、立教大学。

(11) 伊藤克美

Anomalies in the ERG Approach、

国際研究会 “Renormalization Group Approach from Ultra Cold Atoms to the Hot QGP”、2011年8月22日-9月5日 京都大学基礎物理学研究所

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 克美 (ITOH KATSUMI)

新潟大学・人文社会・教育科学系・教授

研究者番号：50242392

(2) 研究分担者

五十嵐 尤二 (IGARASHI YUJI)

新潟大学・人文社会・教育科学系・名誉教授

研究者番号：50151262

(3) 連携研究者

園田 英徳 (SONODA HIDENORI)

神戸大学・理学部・准教授

研究者番号：20291966