

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 4 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22560064

研究課題名（和文） 熱対流の発生とそれに伴うカオス混合に関する数理的研究

研究課題名（英文） Studies on mathematical aspect of the onset of thermal convection and chaotic mixing

研究代表者

船越 満明（FUNAKOSHI MITSUAKI）

京都大学・大学院情報学研究科・教授

研究者番号：40108767

研究成果の概要（和文）：

完全熱伝導の壁で囲まれ、鉛直座標の 1 次関数で表され上方が低温の温度場の中に置かれた直方体容器の中の流体を考え、この容器が水平に置かれているときと水平面に対して傾いているときの熱対流運動の発生を数値計算によって調べた。その結果、臨界レイリー数 Rc および最不安定モードの流れパターンの、容器の傾き角やアスペクト比 Ax, Ay に対する依存性が明らかになるとともに、最不安定モードの速度場の下での流体粒子の運動のようすが明らかになった。

研究成果の概要（英文）：

Onset of thermal convection of a fluid in a rectangular horizontal or inclined container is examined. Here all the walls of container are of perfect thermal conductance, and external temperature field is linearly decreasing upward. By a numerical analysis, the dependences of critical Rayleigh number Rc and the flow structure of most unstable mode on the aspect ratios and inclination angles of container are clarified. Moreover, the characteristics of trajectories of fluid particles in the velocity field of most unstable mode are clarified.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：工学

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎、工学基礎

キーワード：数理流体力学、数理工学、数理物理、熱対流

1. 研究開始当初の背景

熱対流現象は、温度変化を伴う機械システム内の流体の運動を始めとする工学的諸問題において重要であるだけでなく、地球の大気や海洋の循環あるいはマンツルの対流運動を考える上でも重要な要素となっているため、熱対流問題に関する研究は古くから行

われてきた。そして、とくに機械システムなどにおいては、流体はある領域に閉じ込められている場合が多いので、容器内の流体を考えて、その熱対流運動が発生するための条件を求めたり、発生した熱対流運動の流れパターンを求めることも応用上重要である。

容器内の流体の熱対流問題の最も単純か

つ重要な例として、水平に置かれた直方体容器の場合についての研究が、これまで数多く行われてきた。これらの研究においては、壁面上での流体速度が0である滑りなしの条件が仮定される場合が大部分であり、温度に関しては、容器のすべての壁面が完全熱伝導である場合と、上下の壁面のみが完全熱伝導で側壁が断熱の場合の両方が調べられている。このうち壁面がすべて完全熱伝導であり、容器外部の温度場が鉛直座標の1次関数で表され上方が低温の場合においては、外部温度場の勾配 β の値が小さい間は流体が静止している状態(熱伝導解)が見られるが、 β がある値を超えると静止状態が不安定化し、熱対流運動が生じることが知られている。

この静止状態の不安定化を調べる際に重要な無次元パラメータとして、外部温度勾配に比例するレイリー数 $R = \alpha g \beta d^4 / (\kappa \nu)$ がある。ここで、 d は容器の高さ方向の辺の長さ、 α は熱膨張係数、 g は重力加速度、 κ は熱拡散係数、 ν は動粘性係数である。そして、静止状態が不安定化するレイリー数は臨界レイリー数 Rc と呼ばれる。また、直方体容器の形状を特徴づけるパラメータは、容器の水平2方向の辺の長さを d で割ったアスペクト比 Ax, Ay である。

水平に置かれた完全熱伝導の直方体容器の場合の熱対流の発生については、S. H. Davis (J. Fluid Mech. 30 (1967) 465) がさまざまな Ax, Ay の値に対して数値計算を行った。この研究では、 Rc の値とともに、静止状態の不安定化に伴って生じる対流運動のモードである最不安定モードの流れパターンの概略について調べ、 Ax, Ay がともに1より大きいときの最不安定モードは、上から見て短い方の辺に平行な軸をもつロール状の構造をもち、ロールの縦横比は1:1に近いことを示した。しかし、この計算においては、ある側壁に平行な速度成分が0であるというfinite-rollの近似が用いられており、それは厳密には成り立たないことが知られている。また、K. Stork & U. Muller (J. Fluid Mech. 54 (1972) 599) の実験においては、 Ax と Ay の値の差が大きい場合にはDavisの結果に近いが、 Ax と Ay の値が比較的大きくて、かつ互いに近い値である場合には、Davisの結果と合わないことが示されている。

その後、 $Ax=Ay=1$ の立方体容器の場合については、J. Mizushima & O. Matsuda, (J. Phys. Soc. Jpn. 66 (1997) 2337) および D. Puigjaner et al. (J. Fluid Mech. 598 (2008) 393) が Rc の値を高精度で求め、同時に最不安定モードの流れパターンの概形を示した。一方、一般の直方体容器での熱対流の発生に関する研究は、これまであまり本格的に行われていない。とくに、多数の Ax, Ay の値に対する Rc の値と最不安定モードに関する系統

的な研究はほとんど行われておらず、水島二郎、松田 修 (京都大学数理解析研究所講究録 970 (1996) 1) による、いくつかの Ax, Ay に対する結果が示されている程度である。したがって、水平に置かれた完全熱伝導の直方体容器の場合の熱対流の発生については、十分に解明されたとは言えず、とくに、 Ax, Ay がともに大きく近い値の場合の Rc の値と最不安定モードについては明らかでなかった。さらに、最不安定モードの流れパターンについては、一部の Ax, Ay に対しては概形が示されているが、その速度場の詳細な解析については、これまで行われていなかった。

つぎに、鉛直座標の1次関数で表され上方が低温の外部温度場の中に直方体容器が水平面から傾いて置かれている場合においても、静止状態は外部温度場の勾配 β がある値を超えると不安定化し、熱対流運動が生じる。このときの Rc の値や最不安定モードが、アスペクト比 Ax, Ay や容器の傾き角にどのように依存するかは興味深い問題であるが、これまで調べられていない。

また、静止状態の不安定化に伴って発生する最不安定モードの熱対流運動は、一般に3次元定常流となることが知られている。3次元定常流の速度場の下での流体粒子(流体の微小部分)の運動は、複雑なものになる場合があることが知られており、また一般にカオス的な軌跡を示す可能性があることが知られている。そして、カオス的な軌跡となる場合には、流体の効率のよい混合が期待され、それは一般にカオス混合と呼ばれている。このカオス混合に関する研究は1980年代から始まり、さまざまな流れの下でのカオス混合が調べられてきた。

直方体容器中の熱対流の3次元定常流の速度場の下での流体粒子の軌跡については、W. Arter (J. Fluid Mech. 152 (1985) 391) や A. A. Chernikov & G. Schmidt (Phys. Lett. A 169 (1992) 51) などによって調べられており、カオスの軌跡も得られている。しかし、これらの研究における容器の壁での境界条件は自然なものではないので、実験等との比較は難しい。また、Ozoe et al. (ASME J. Heat Transfer (1976) 202: Internat. Chem. Eng. 19 (1979) 454) は、数値計算と実験によって、直方体容器中の一部の流体粒子の軌跡を調べ、ヘリカルな流線なども得ているが、カオス的な振る舞いを直接示唆する結果は得ていない。直方体容器内の3次元定常熱対流の下での流体粒子の軌跡に関するこれまでの研究は上記のようなものであり、熱対流でのカオス混合について直接調べた研究は行われていない。

2. 研究の目的

本研究では、完全熱伝導の壁で囲まれ、鉛

直座標の1次関数で表され上方が低温の外部温度場の中に置かれた直方体容器の中の粘性流体を考える。そして、この容器が水平に置かれているとき、あるいは水平面に対して傾いているときの流体の熱対流運動を、ブシネスク近似の下での熱流体系の基礎方程式に基づいて、数理的な手法で調べることを目的としている。具体的には、臨界レイリー数 Rc および最不安定モードの流れパターンの、容器の傾き角やアスペクト比 Ax, Ay に対する依存性を詳細に調べるとともに、最不安定モードの速度場の下での流体粒子の運動を求め、流体粒子のカオス運動に伴うカオス混合の可能性を調べることを目的とする。

3. 研究の方法

直方体容器中の流体の非発散速度場を表すために用いる3個のスカラー値関数、および流体の温度場を表す1個のスカラー値関数を、壁面での境界条件（速度の滑りなし条件および完全熱伝導条件）をみたす修正チェビシェフ多項式系を用いて展開した。そして、ガラーキン・スペクトル法を用いることによって、静止状態が不安定化する臨界レイリー数 Rc の値および最不安定モードの流れパターンを、容器のさまざまなアスペクト比 Ax, Ay や傾き角に対して、数値的に求めた。この際、展開項数の増加に伴う Rc の値や最不安定モードの速度場の収束が十分であることを確認し、高精度の結果を得た。

また、最不安定モードの速度場の下での流体粒子の運動の軌跡を高精度の数値計算法を用いて求め、軌跡の特徴やカオス運動の可能性について調べた。

4. 研究成果

(1) 本研究では、まず熱対流に関する新しい数値計算法として、3成分がいずれも0でないベクトルポテンシャルを用いた速度場の表現および境界条件をみたす修正チェビシェフ多項式系に基づくガラーキン・スペクトル法を提案した。そして、水平に置かれた立方体容器での Rc の値に関する高精度の先行研究の結果と比較することによって、この方法が高い精度をもつことを確認し、また、この方法が直方体容器での熱対流の高精度の数値計算法として十分有効であると期待できることを示した。

(2) 次に、上記の方法を用いて直方体容器が水平に置かれている場合の熱対流の発生について調べた。その際、水平座標 x, y と鉛直座標 z からなる直角座標系の原点を容器の中心に置き、 x, y 座標を容器の辺に平行にとった場合、速度場と温度場は異なる対称性をもつ8個のモードに分類できる。各モードは温度場の熱伝導解での値からのずれ θ が x, y, z 方向に偶関数(e)か奇関数(o)かによって特徴

づけられ、たとえば x 方向、 y 方向に偶関数であり、 z 方向に奇関数であるモードは $\theta(e, e, o)$ モードと呼ぶことにする。

そして、本研究での数値計算の結果、次のことがわかった。

① 臨界レイリー数 Rc の値は、一般にアスペクト比 Ax, Ay の値が増加するにつれて減少する傾向がある。そして、 Ax, Ay の値の変化に伴って、最不安定モードの交代が繰り返される。たとえば、図1では $Ax=1$ に固定して Ay の値を変えたときの $\theta(e, o, e)$ モードと $\theta(e, e, e)$ モードの Rc の値が示されているが、これらのモードが交互に最不安定モードとなっていることがわかる。また、 Ay の値が増加するとともに、両モードの Rc の値の差が小さくなるので、一般に大きな Ax, Ay での最不安定モードを決定するためには、高い精度の計算が必要であることもわかる。

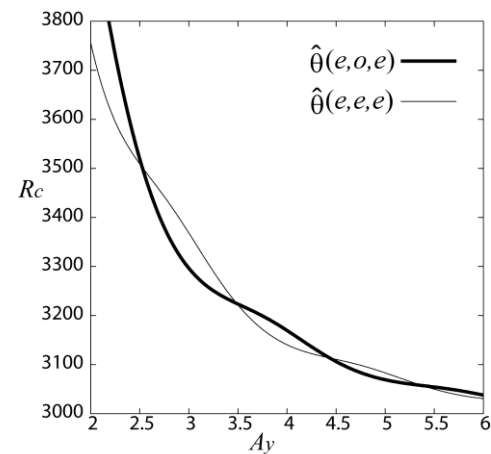


図1

② アスペクト比 Ax と Ay の差が大きいときには、最不安定モードは上から見て短い方の辺に平行な軸をもつロール状の渦運動に近い。すなわち、この意味ではDavisの得た結果に近いと言える。しかし、この最不安定モードの速度場の下での流体粒子の運動は、容器の中心付近では2次元的なものに近いが、それ以外の場所では3次元性が強くなり、finite-rollの近似が成り立っていないことが確認できる。また、 Ax と Ay の比が1から離れるほど速度場の3次元性は弱くなり、finite-rollの流れ場に近くなる。

③ アスペクト比 Ax と Ay の値が $0.125 < Ax < 6, 0.125 < Ay < 6$ を満たす場合について、 Rc の値と最不安定モードを高精度かつ詳細に求めると、最不安定モードに関して図2のような結果が得られる。この図では、最不安定モードの θ に関する対称性が (o, e, e) 等で表されている。

$Ax=Ay=1$ の立方体容器の場合には、最不安定モード [$\theta(o, e, e)$ あるいは $\theta(e, o, e)$ モード] は1対の側面に平行で水平な軸をもつ渦状

の流れパターンに近い。また、 $A_x=A_y$ の条件を満たすように A_x, A_y の値を増加させていくと、最不安定モードの流れパターンは、2つの側面方向から見た渦の数が (2, 2)となるパターン [$\theta(e, e, e)$ モード], (2, 3)[あるいは(3, 2)]となるパターン [$\theta(o, e, e)$ あるいは $\theta(e, o, e)$ モード], (3, 3)となるパターン [$\theta(o, o, e)$ モード], ... となる。すなわち、これらの渦の数は A_x, A_y の増加につれて増加し、渦の数が等しい値になる場合と1だけ異なる場合が交互に見られる。また、とくに $A_x=A_y=4$ 付近で見られる (3, 3)の渦パターンは、 A_x と A_y の値の差が大きい場合には見られなかった新しい対称性 $\theta(o, o, e)$ をもつモードである。この対称性をもつモードは、 $A_x=A_y=5.5$ 付近でも見られる。 $A_x=A_y=4$ 付近で $\theta(o, o, e)$ モードが最不安定モードとなることは、 $A_x=A_y$ の場合に4個のモードに対する Rc の値の A_x 依存性を計算した図3においても示されている。

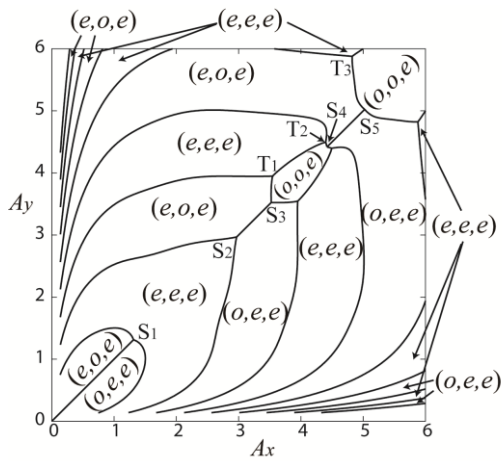


図2

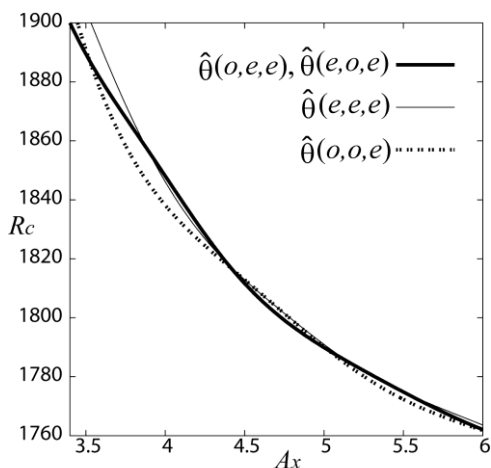


図3

④ 最不安定モードの速度場の下での流体粒子の軌跡を、さまざまな A_x, A_y の値に対して

高精度で計算したが、大部分の軌跡は図4に例示したように閉曲線となり、カオスの軌跡は見出せなかった。図4においては、 $A_x=A_y=1$ の場合の最不安定モードが示す、1対の側面に平行で水平な軸をもつ渦状の速度場の下での軌跡の例が示されている。図4には示されていないが、この速度場は実際には複雑な構造をもっている。すなわち、 $y=0.5$ と $y=-0.5$ の側壁付近での流体粒子の軌跡は、これらの側壁に沿った閉曲線となり、図4に示した容器の中心付近での軌跡とは大きく異なる。また、この速度場の対称面である $x=0$ 付近から出発して $x=0.5$ の側壁近くに達したあと、再びこの対称面近くに戻ってくる軌跡もある。このような軌跡の存在は、 $x=0$ の対称面上での速度場や壁面近傍の速度場から推測することができる。このように、流れ場の構造や流体粒子の軌跡を調べる際には、壁面近傍での速度場や、流れの対称面上での速度場が有用な情報を与えることが多い。

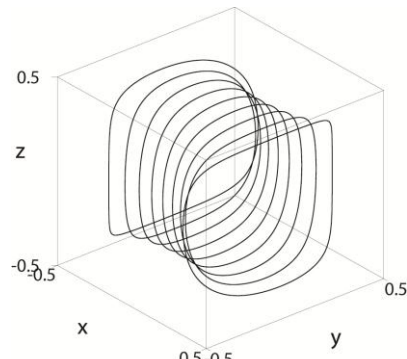


図4

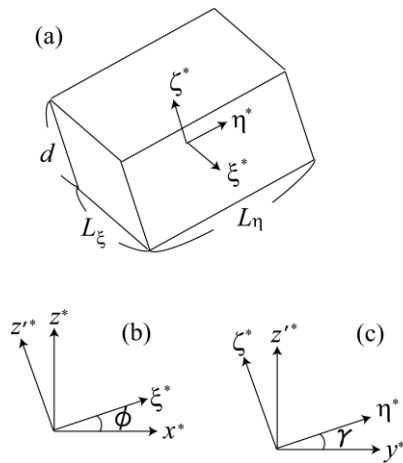


図5

(3) 次に、直方体容器を水平面に対して傾けた場合の熱対流の発生についても調べた。この場合、容器の2つの傾き角 ϕ と γ を図5のように定義した。すなわち、まず図5(b)の

ように y 軸の周りに角度 ϕ だけ傾けた座標系を $0-\xi yz$ とし、次いで図 5 (c) のようにこの座標系を ξ 軸の周りに角度 γ だけ傾けた座標系を $0-\xi \eta \zeta$ とする。そして、図 5 (a) のように、 ξ 軸、 η 軸、 ζ 軸方向に容器の各辺が向くように容器の姿勢を決める。

容器が傾いている場合には、速度場と温度場は異なる対称性をもつ 4 個ないし 2 個のモードに分類できる。すなわち、 $\phi=0$ で γ が 0 でない場合は、温度場は $\theta(e,e)$ 、 $\theta(e,o)$ 、 $\theta(o,e)$ 、 $\theta(o,o)$ のいずれかの対称性をもつ。ここで、たとえば $\theta(e,o)$ は ξ に関して偶関数であり、 η と ζ の同時符号反転に関して奇関数であることを意味する。また、 ϕ も γ も 0 でない場合は、温度場は $\theta(e)$ と $\theta(o)$ のいずれかの対称性をもつ。ここで、たとえば $\theta(e)$ は ξ 、 η 、 ζ の同時符号反転に関して偶関数であることを意味する。

アスペクト比 Ax 、 Ay と傾き角のいくつかの値に対して Rc の値と最不安定モードを調べた結果、次のことがわかった。

① 多くの Ax 、 Ay に対しては、容器を傾けていくと最不安定モードがある傾き角で切り替わる。とくに $Ax=1$ 、 $Ay=3$ や $Ax=1$ 、 $Ay=4$ の場合には、この切り替えが 2 回起こる。図 6 は、 $Ax=1$ 、 $Ay=3$ の場合に、 $\phi=0$ に固定して γ の値を変えたときの、各対称性をもつモードの Rc の値を示している。最不安定モードが $\gamma=33$ 度と $\gamma=49$ 度あたりで 2 回切り替わっているのがわかる。

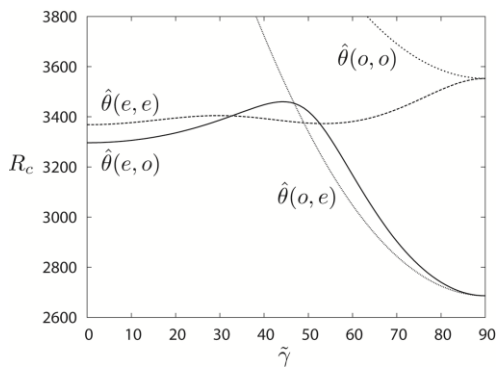


図 6

② 立方体容器において、 $\phi=0$ で γ が変化する場合、すなわち 1 つの辺を水平に保ったまま容器を傾ける場合には、図 7 に示したように、傾き角 γ が 45 度のときに Rc の値が最小となる。また、 $\phi=45$ 度に保ったまま γ を変化させると、 $\gamma=29$ 度付近でさらに小さい Rc の値が得られる。すなわち、容器を適当な角度で 2 方向に傾けることによって Rc の値を水平に置かれた場合よりも小さくできる。したがって、立方体容器を適当な角度で傾けることによって対流が起りやすくなる。

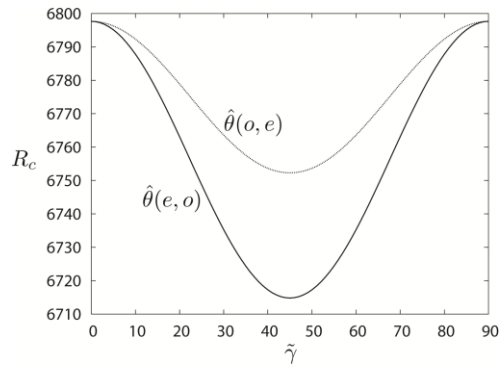


図 7

③ 容器が傾いている場合の最不安定モードの速度場の下での流体粒子の軌跡は、傾いていない場合に比べて複雑になる傾向があり、パラメータの値によってはカオスとなる可能性を示唆している。したがって、容器を傾けることによってカオス混合がもたらされる可能性がある。

(4) 以上の結果によって、これまであまり明らかにされていなかった長方形容器内の熱対流の発生とそのときの対流パターンに関する理解が大きく進んだと言える。また、本研究で得られた結果は、閉じた領域内での熱対流に関係した今後の応用的研究においても役立つと期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① 船越満明・深澤義成、「直方体容器中の熱対流の発生と対流パターン」、日本学術会議第 62 回理論応用力学講演会講演論文集、査読無、USB メモリー、2013 年

② 船越満明・深澤義成、「直方体容器内の熱対流の発生と流れパターン」、第 61 回理論応用力学講演会講演論文集、査読無、USB メモリー、GS02-15、2012 年。

③ Y.Fukazawa and M.Funakoshi, “Onset of three-dimensional thermal convection in an inclined rectangular cavity”, Theoretical and Applied Mechanics Japan, 査読有, Vol.60, pp.163-174, 2011 年.

④ 深澤義成・船越満明、「直方体容器内の 3 次元熱対流の発生」、日本流体力学会誌「ながれ」、査読無、第 30 巻別冊、p.53, 2011 年。

⑤ 深澤 義成・船越 満明、「直方体容器内の 3 次元熱対流の発生」、第 60 回理論応用力学講演会講演論文集、査読無、USB メモリー、2011 年。

〔学会発表〕(計7件)

① 船越満明・深澤義成、「直方体容器中の熱対流の発生と対流パターン」、第62回理論応用力学講演会、2013年3月7日、東京工業大学。

② M. Funakoshi and Y. Fukazawa, “Onset of three-dimensional thermal convection in an inclined rectangular or cubic cavity”, 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 2012年8月21日, Beijing, China.

③ 深澤義成・船越満明、「直方体容器内の熱対流の発生と流れパターン」、第61回理論応用力学講演会、2012年3月9日、東京大学。

④ M. Funakoshi and Y. Fukazawa, “Onset of Three-Dimensional Thermal Convection in a Rectangular Cavity”, 64th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics, 2011年11月20日, Baltimore, USA.

⑤ 深澤義成・船越満明、「直方体容器内の熱対流の発生」、日本物理学会2011年秋季大会、2011年9月23日、富山大学。

⑥ 深澤義成・船越満明、「直方体容器内の3次元熱対流の発生」、日本流体力学会年会2011、2011年9月7日、首都大学東京。

⑦ 深澤 義成, 船越 満明、「直方体容器内の3次元熱対流の発生」、日本学術会議第60回理論応用力学講演会、2011年3月9日、東京工業大学。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

船越 満明 (FUNAKOSHI MITSUAKI)
京都大学・大学院情報学研究科・教授
研究者番号：40108767

(2) 研究分担者

該当者なし

(3) 連携研究者

該当者なし