

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22560198

研究課題名(和文)乱流熱対流場の確率微分方程式近似に関する基礎的検討

研究課題名(英文) Stochastic differential equation modeled on a turbulent thermal convection field

研究代表者

石田 秀士 (Hideshi, ISHIDA)

大阪大学・基礎工学研究科・助教

研究者番号：80283737

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：蔵本・シバシンスキー方程式(KSE)をノイズを含むバーガース方程式(NBE)で近似すると、有効粘性係数(ν_{eff})とノイズ強度(N)の二つのパラメータが現れる。本研究ではNBEの数値伊藤積分によりKSEの解の特性を再現する最適な ν_{eff} と N を見積もった。NBEの解の平均と分散をKSEのものと同じさせた場合、 ν_{eff} と N の間には広範囲に指数関数で示される特性があることが分かった。この曲線上に二つの値を定め、KSEとNBEの大偏差関数を比較した所、カルマン・ブーシーフィルタでKSEから求めた値を ν_{eff} に定めると、両者は一致することが確認でき、Yakhot仮説が数値的に検証された。

研究成果の概要(英文)：The noisy Burgers equation (NBE) modeled on the Kuramoto-Sivashinsky equation (KSE) has two coefficients of an effective viscosity ν_{eff} and a noise strength N . In this study, they are optimized by the numerical stochastic integration of NBE to recover the properties of KSE. Under the condition that the average and variance of the solution of NBE agree with those of KSE, the values of the two coefficients are found to have a degree of freedom, showing exponential manner for a wide range of ν_{eff} . The optimal values are determined by the agreement of large deviation functions obtained from the solutions of KSE and NBE. The optimal value of ν_{eff} , far smaller than known values, is found to accord with the estimated one by the Kalman-Bucy filter, minimizing the noise level N on the exponential curve. The agreement numerically validates the Yakhot conjecture. The strength N estimated by the variance of a noise-related term of KSE agrees well with the optimal one near $\nu_{\text{eff}}/\alpha=1$.

研究分野：工学

科研費の分科・細目：機械工学・熱工学

キーワード：乱流 確率微分方程式 ノイズ強度 有効粘性係数 カルマン・ブーシーフィルタ 大偏差関数 エネルギーバランス

1. 研究開始当初の背景

熱・流体工学の分野では乱流の直接数値計算が事実上不可能であるため、工学的に必要な時間・空間分解能での変数の方程式系を得るため、レイノルズ平均化された N-S 方程式 (RANS) に基づいた各種の乱流モデルや LES, PDF (確率密度関数) の輸送方程式モデル等が利用されている。

しかしながらこれらの方程式系は提案された段階ではある種の境界条件に特化した係数やモデル化項を有しており、複雑な形状や境界条件での計算が必要な一人のエンジニアが、その条件に対応するよう係数やモデル化方程式を適切に修正し、個々の条件に対応したオーダーメイドの乱流モデルを構築するのは容易ではない。また特に RANS 系モデルを用いた場合、統計的定常状態では時間発展により得られる個々の変数の PDF は物理的に意味をもたず、わずかにその分散が乱流エネルギー k の形で求まっていて意味を持つくらいである。従って LES か PDF を直接扱うような比較的計算時間がかかる手法を用いない限り、PDF に関する情報は得られないと考えてよい。

2. 研究の目的

そこで本研究では具体的な形状や境界条件が与えられた場合、乱流の強度を支配するパラメータ (レイノルズ数 Re やレイリー数 Ra) を乱流 (カオス) が起こる臨界値近辺まで引き下げた直接数値計算 (この場合時間・空間分解能は低くてもよく、エンジニアが容易に行える) を数回行い、この計算結果から理論的な考察を伴うことなく、まるで最小自乗法を用いて近似曲線を作るかのようにモデル化方程式の形式とその係数値を決定し、オーダーメイドの乱流モデルが構築できないかと考えた。

この際、モデル化方程式を変数の関数 (空間微分) で与えられる決定論的な項と、そのまわりのランダム項 (揺動力項) に分け、モデル化の誤差をランダム項に押し込めることで乱流モデルの完結問題を処理できるのではないかと考えた。このように構築された方程式系は離散化するという確率微分方程式系 (SDEs: Stochastic Differential Equation System[1]) となる。この方程式系の数値計算結果は決定論的な形では得られず、方程式を満たす時間変化の一例が得られるに過ぎないが、その代わりに統計的定常状態での各変数の値の時間変動は PDF の情報を有している。

本研究ではこのようなモデル化方程式を普遍的な確率偏微分方程式の形で求めるのではなく、N-S 方程式をある特定の方法で離散化した方程式系を常微分方程式系とみなし、この方程式系の振る舞いを確率微分方程式系に近似することを特徴としており、各種の形状・境界条件に加え、各種の離散化法に

も対応した究極のオーダーメイドモデルが構築でき、モデル化方程式の組み込み (プログラム作成) も容易であるというメリットを有している。

このような確率微分方程式による乱流モデルの構築のための基礎的検討として、本研究では位相乱流の基礎方程式として知られる蔵本-シバシンスキー方程式 (KSE: Kuramoto-Sivashinsky Equation[2,3]) を取り扱う。この方程式は Yakhot 等[3-7]の研究によりノイズを含むバーガース方程式 (NBE: Noisy Burgers Equation) で近似できることが知られており、研究の数は多いが、これは現時点では仮説の域を出ず、Yakhot 仮説として知られ、KPZ 普遍クラスとの関係で現在でも集中的に研究が行われている。この KSE を NBE に近似する際はノイズ強度 N と有効粘性係数 ν_{eff} を決定する必要があり、多くの研究ではこのパラメータの決定に遮断波数を用いているが、当然ながら決定されたパラメータの値はこの波数に依存するので、物理的に合理的であるとは言えない。またこのような方法では有効粘性係数の空間分布は求まらず、そして得られた結果が妥当であるか十分な検討が行われているとは言いがたい。本研究ではこのような遮断波数を用いず、できうる限り KSE の数値解の情報のみから NBE のパラメータを決定し、その妥当性を特に KSE の統計的性質から検証することを目的とする。

3. 研究の方法

本研究ではまず確率微分方程式近似の基本的検討を計算負荷の小さい環境下で行うため、1次元位相乱流の方程式である蔵本-シバシンスキー方程式 (KSE[2,3]) を取り上げ、(1)粗視化の方法、(2)決定論的項 (モデル化項) とランダム項の分離方法の検討、(3)確率微分方程式で近似した方程式の満たすべき条件の検討、(4)数値計算による近似法の検討、(5)近似方程式の精度検討、(6)乱流強度を支配するパラメータ (Hyman[3]の KSE 表現では a) を増加させた場合のモデル化方程式の適用性検討を行う。

3.1 蔵本-シバシンスキー方程式の特性と研究方法との関連性

蔵本-シバシンスキー方程式 (KSE) は乱流火炎、もしくは位相乱流の 1次元基礎方程式として知られている。本研究でこの方程式を扱う理由は 1次元の方程式で計算負荷が小さいこと以外にその特性が本研究の目的と方向性に合致する点が上げられる。

乱流では運動エネルギーのスペクトルが高波数域で普遍的特性を有し、コルモゴロフの第 1, 2 相似則として知られているが、KSE の変数 u の二乗量 (以下これを便宜上エネルギーと称する) についてもコルモゴロフの第 1 相似則に相当するものが作れる。通常の乱流のエネルギー式と違い、KSE では二階微分項に基づくエネルギー注入と四階微分項に

基づくエネルギー散逸があるがこの間にスケールの分離はなく、コルモゴロフの第2相似則に相当するものは存在しない。そのかわりエネルギー注入・散逸スケールと代表長さスケールの間にスケールの分離(Hyman の KSE 表現では分離パラメータは a)があり、低波数側に高波数側からのエネルギー伝搬によって形成されるエネルギースペクトル一定のフラットな領域が形成され、これが第2相似則に相当するものとなる。すなわち普遍的特性を示す高波数領域の特性は単純でそのような領域の波数境界 k_c は単一のパラメータ a で決定される。

後述の通り、本研究で行う粗視化によって高波数側の成分がカット(遮断)され、その影響を方程式に付加するモデル化項で取り込むことになるが、上述のような特性によりモデル化項の特性と、その形式・係数の普遍性をモデル化で生じる遮断波数と臨界値 k_c の関係で議論することが可能となる。また上述の通り KSE では内部的に二階微分項によりエネルギーが注入されるので通常の乱流のように乱流を維持するための外場が必要なく、周期境界条件の下でも乱流が維持される。この場合乱流の特性に空間依存性がなくなるので、研究の初期段階で空間依存性をもたないような簡易な付加モデル項を扱うことが可能となり、基礎的検討を行う上で便利である。

3.2 具体的な研究内容

平成22年度にはカルマンブーシーフィルタを用いた有効粘性係数 v_{eff} の決定法を開発し、さらにノイズ相当項の統計的性質よりノイズ強度 N を決定する方法も提案した。平成23年度にはこのノイズ強度 N の適切な値を NBE の数値計算により求め、平成24年度には以上のようにして得られた v_{eff} と N を用いて NBE の数値計算を行った場合の有限時間平均量の確率密度関数(大偏差関数)を KSE のそれと比較し、その妥当性を検証した。最終平成25年度には NBE の数値解析を必要としない N の決定方法について検討を行った。いかがその研究成果である。

4. 研究成果

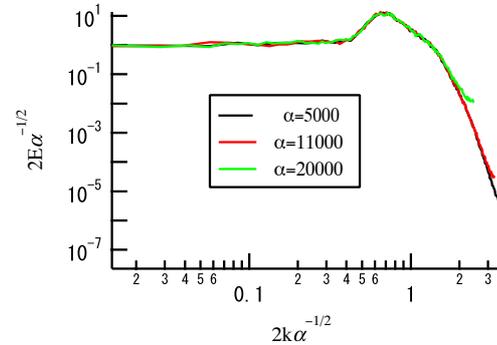
4.1 KSE と 普遍性

KSE[2]は Hyman[3]の無次元化により

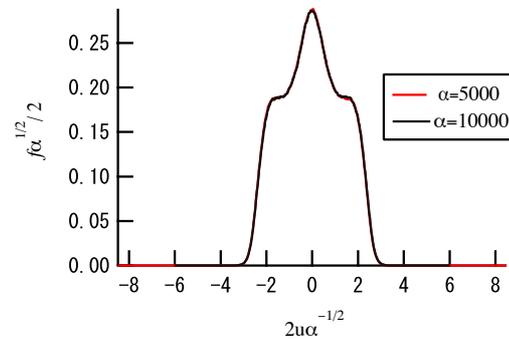
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + 4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

と表現されるが(ただし $0 \leq x \leq 2\pi$)、パラメータ α は、この方程式においてはレイノルズ数に関連づけられるような乱流強度を決定するパラメータである。この α が十分大きい時、具体的には α が 5000 以上では、 u に関連する量は普遍的で、 α によらないことが確認できる。図1にエネルギースペクトル、確率密度関数(PDF: Probability Density Function)、大偏差関数(LDF: Large Deviation Function)を示し

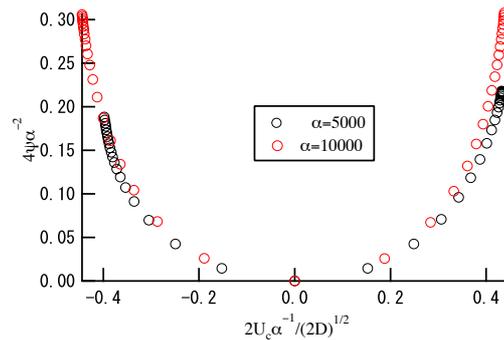
ているが、 α が 5000 以上で同一の特性を示すことが確認できる。この図で横軸・縦軸は式(1)の数値計算結果を再規格化したものであるが、これは Zalesky の無次元化に対応するものである。



(a) energy spectrum



(b) PDF



(c) LDF

Figure 1. Universality of u -related quantities for α . E denotes the energy spectrum, f probability density function, ψ large deviation function, U_c time-mean u , and D diffusion coefficient of u , obtained by Green-Kubo formula.

4.2 NBE と伊藤積分解釈

Yakhot[4]は KSE が次に示すノイズを含むバーガース方程式(NBE)で近似できると主張した。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + v_{\text{eff}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta(x, t) \quad (2)$$

ここで v_{eff} は有効粘性係数であり、 η はガウス型ホワイトノイズである。この主張は Yakhot 仮説として知られている。この方程式はしかしながら確率偏微分方程式(SPDE: Stochastic Partial Differential Equation)であり、この方程式の解の存在ですら数学的に議論のある所である。そこで本研究では(2)式をすでに数学的定義が完了している伊藤積分を用いて、次のようなある x 上の点での SDE と解釈する。

$$du = \left(-\alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + v_{\text{eff}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dt + N dB_t \quad (3)$$

ここで N はノイズ強度である。この解釈により、NBE は SDE に変換され、SDE に関して開発されている各種の数値積分法を用いて(3)の解の時間発展(ただし確率過程)を求めることが可能となる。しかし(3)式の数値積分には空間勾配の情報が必要であり、この情報の不足は KSE(1)の解により補う。

4.3 NBE, KSE の数値積分法

本研究では KSE(1)は4次精度ルンゲクッタ法で積分した。空間的な離散化にはスペクトルライクコンパクトスキーム[lele]を用い、周期境界条件ならびに $u=0.1 \cos x$ で表現される初期条件を用いた。なお十分時間が経過した統計的定常状態においては図1で示される u の特性は初期値には依存しない。スペクトルライクコンパクト差分は非常に高精度で一般にスペクトル法に相当する精度を実現することがよく知られている。一方 NBE(3) はオイラー丸山法を用い、 $x=\pi/2$ において数値積分した。周期境界条件の下では解の統計的性質は位置に依存しないと考えられる。空間微分項については KSE の解を利用してスペクトルライクコンパクトスキームにより評価した。次に v_{eff} と N を求める方法について考える。

4.4 カルマン・ブーシーフィルタによる有効粘性係数の決定

SDE の研究分野においては(3)の有効粘性係数 v_{eff} の最適値を推定する問題はフィルタの問題と見なされる[1]。この問題は以下に示すような線形な系と線形な観測によって構成されている。

$$\text{(線形な系)} \quad dv_{\text{eff}} = 0 \quad (4a)$$

(線形な観測)

$$du = f(t)dt + v_{\text{eff}} g(t)dt + N dB_t \quad (4b)$$

カルマン・ブーシーフィルタの標準的な方法を用いると v_{eff} の最適値(最尤推定量) $v_{\text{eff,opt}}$ は次のように求まる。

$$v_{\text{eff,opt}}(t) = \frac{\int_0^t g(s) du - \int_0^t g(s) f(s) ds}{\int_0^t g(s)^2 ds} \quad (5)$$

図2に示しているように推定量(5)は時間発展させると収束し、 $v_{\text{eff,opt}}/\alpha=0.493$ を得るがこの値は α によらない。この方法では従来法[5-7]のように遮断波数を必要としない点が注目される。しかしながら、カルマン・ブーシーフィルタからはノイズ強度 N を決定できない。従って次に NBE の数値積分により N を決定することを考える。

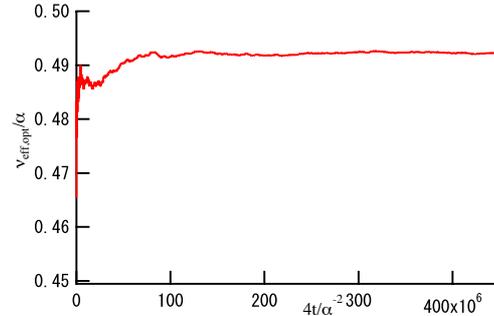


Figure 2. A sample path of the optimal estimator ($\alpha=5000$)

4.5 NBE の数値積分と N の最適値

図3に KSE と NBE の PDF を示している。この図では本研究で採用したある特定の点における SDE の数値積分が Huse[8]による NBE の PDF の解析的表現であるガウス分布を実に良く再現することを示している。なお、この KSE と NBE の差は重要ではない。なぜなら NBE は KSE を時間的に粗視化した振舞いを模擬した方程式であるからである。従ってこれらの一致についての結論は時間平均値の PDF に相当する LDF の結果を待たねばならない。

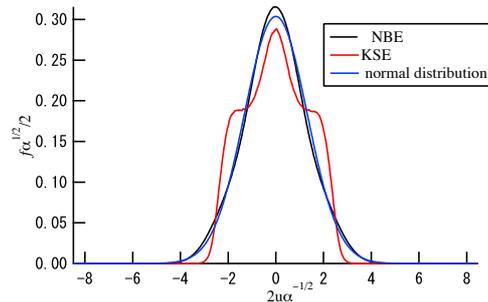


Figure 3. PDFs of KSE and NBE ($v_{\text{eff,opt}}/\alpha=0.493$). f is PDF.

図4に NBE の数値計算により求めた N と v_{eff} の関係を示している。ただし u の平均・分散は KSE(1)のそれと一致するように調整した。周期境界条件の下では、 u の時間平均値は初期分布に対する値である 0 に固定される。従って KSE の分散に一致させるようにすれば十分である。この図の領域(1), すなわち

ノイズレベルが0に向かって低下している領域は、空間勾配項を通じて KSE の解によってもたらされたものである。なぜならノイズ強度0は、SDEにおいては後述の通り単位時間あたりのエネルギー注入 $N^2/2=0$ を意味するからである。従って領域(1)の振舞いは非物理的である。同じ図の領域(2)では α について普遍性が見られないが、これもまた物理的に無意味であると考えられる。従って両者に挟まれた有効粘性がノイズ強度の指数関数で表される特性こそが普遍的であるといえる。この図を見るとカルマン・ブーシーフィルタで得られた $v_{\text{eff}}/\alpha=0.493$ はこの指数領域の左端に位置しており、結果としてノイズレベルが最小となっている。

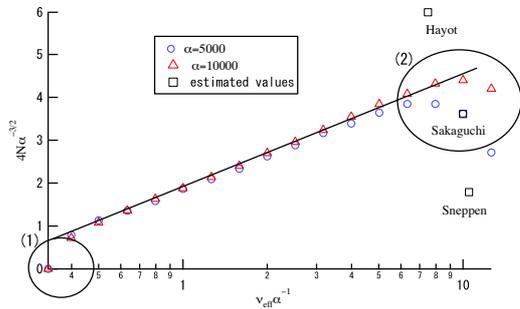


Figure 4. Relation between N and v_{eff} with the variance of u fixed

図5は図4の曲線上における大偏差関数を示している。これを見るとカルマン・ブーシーフィルタによって得られた有効粘性係数における LDF は KSE の LDF に最も良く一致している。この $v_{\text{eff}}/\alpha=0.493$ という値は図4で示されているように、他の文献[5-7]で示されているもの比べてずっと小さいが、これらの結果からこの値こそが最適値であると考えられ、これらの結果は数値的に Yakhot 仮説を検証したものとみなすことができるだろう。

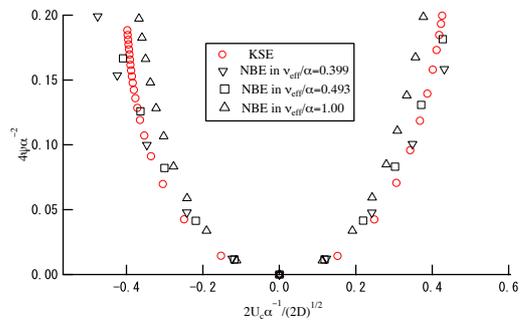


Figure 5. Large deviation function on the fixed-variance curve. U_c denote time-mean u , and D diffusion coefficient of u , obtained by Green-Kubo formula.

4.6 N の推定法についての検討

上述の方法ではノイズ強度は NBE での数値解析によって決定されるので、KSE の数値解のみから N を決定する立場からは望ましいものではない。そこで本研究では KSE の解を利用して以下に示す NdB_t に対応するノイズ相当項の微小変化量 df :

$$df = du - \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} dt + v_{\text{eff}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt \quad (6)$$

から N を決定することを考える。もし df が真に SDE のノイズ項であれば df^2 のアンサンブル平均は $N^2 dt$ となるのでノイズ強度が求まるが、KSE から求まる df には時間的相関があり、この方法を用いることができない。従って十分大きい時間(粗視化時間) T_c が経過した後の変化量、すなわち時間的粗視化した変化量 Δf を求め、この2乗のアンサンブル平均を T_c で割ってノイズ強度を決定することを考える。ただし、ノイズ KSE の解から df を評価すると df と u に相関が現れるので、これを除去する必要がある。なぜなら NBE(3) のエネルギーバランス式は伊藤の公式より

$$d\left(\frac{u^2}{2}\right) = \left(-\alpha u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + v_{\text{eff}} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{N^2}{2} \right) dt + N u dB_t \quad (6)$$

となり、右辺第2項に相当する上述の相関が u のエネルギー注入をもたらすからである。

そこで時間の関数である $df(t)$ を Takens の埋め込み[9]で多次元ベクトル化(埋め込み次元 M)して df を求め、同じく時間の関数である $u(t)$ を多次元ベクトル化した u と直交するように、 df から u の成分を抜き取ったものを改めて df と再定義した。この変化量ベクトルを T_c 時間積分して、 Δf を求め、以下のようにノイズ強度を決定した。

$$N^2 = \frac{1}{MT_c} E \left[\left| \Delta f \right|^2 \right] \quad (7)$$

ここで E はアンサンブル平均である。

この結果を図4の結果に重ねて図6に示す。この図より、十分粗視化時間 T_c を大きくすると、 N は粗視化時間に依存しなくなることが確認できるが、カルマン・ブーシーフィルタによって得られた $v_{\text{eff}}/\alpha=0.493$ において見積もられた N は NBE の直接計算結果と一致はしていない。そこで図には他の有効粘性の値に対して N の最適値を推定した結果を示しているが、この推定された曲線はほぼ $v_{\text{eff}}/\alpha=1$ で交差している。(6)を空間積分したものを KSE のエネルギーバランス式を空間積分したものと比較すると、 $v_{\text{eff}}/\alpha=1$ が得られることを考慮すると、この結果は本研究で採用した N の推定法がエネルギーバランスを重要視する手法であることに起因していると考えられる。したがって注目する特性に応じた N の推定法を用いることで

$v_{\text{eff}}/\alpha=0.493$ において N の推定値が最適値に一致するような手法を提案することも今後可能であると考えられる。

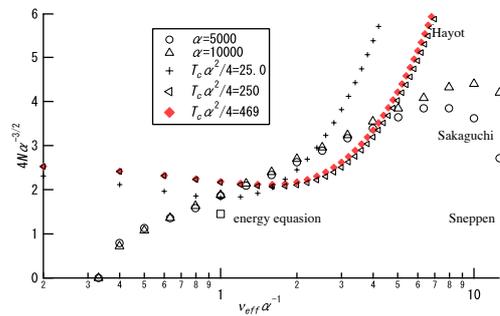


Figure 6. Noise strength N , estimated by the solution of KSE in conjunction with Takens' embedding technique. Renormalized delay time, $\tau_c\alpha^2/4$, and embedding dimension, M , are 25.0 and 80, respectively.

4.7 結論

本研究では KSE を NBE で近似する際に必要な有効粘性係数 v_{eff} とノイズ強度 N を推定する方法について検討した結果以下の結果が得られた。

- (1) NBE に特定の点における伊藤積分を適用して数値解析した結果は Huse による解析解と一致した。
- (2) NBE の平均と分散を KSE のものと一致させた状態では $N(v_{\text{eff}})$ には自由度があり、広範囲にわたって両者は指数関数的な関係を有することが分かった。
- (3) N と v_{eff} の最適値を LDF により決定した。その結果 v_{eff} は過去の文献で報告されている値よりはずっと小さく、カルマン・ブーシーフィルタによって予想される値に一致することを確認した。この LDF の一致の意味で Yakhot 仮説は数値的に検証された。
- (4) Takens の埋め込みを用いて KSE の数値解を多次元化し、 u のノイズ相当項を直交化して相関を 0 とする方法でノイズレベルを決定した結果、 $v_{\text{eff}}/\alpha=1$ 付近では NBE の数値計算結果から求めたものと遜色のないものが得られた。しかしながらこの方法については議論の余地があり、今後の課題である。

参考文献

- [1] B. Øksendal, Stochastic differential equations (Springer-Verlag, 1998).
- [2] Y. Kuramoto, and T. Tsuzuki, Prog. Theor. Phys., 55 (1976), 356-369.
- [3] J. M. Hyman and B. Nicolaenko, Physica D: Nonlinear Phenomena 18, 113 (1986).
- [4] V. Yakhot, Phys. Rev. A 24, 642 (1981).
- [lele] S. K. Lele, J. Comput. Phys. 103, 16 (1992).
- [5] K. Sneppen, J. Krug, M. H. Jensen, C. Jayaprakash, and T. Bohr, Phys. Rev. A 46,

R7351 (1992).

- [6] H. Sakaguchi, Prog. Theor. Phys. 107, 879 (2002).
- [7] F. Hayot, C. Jayaprakash, and C. Josserand, Phys. Rev. E 47, 911 (1993).
- [8] D. A. Huse, C. L. Henley, and D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. 55, 2924 (1985).
- [9] F. Takens, Detecting strange attractors in turbulence, in Lecture Notes in Mathematics, 898, Springer, 1981, 366-381.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 4 件)

- ① 岡本友里子, 石田秀士, 河原源太, Kuramoto-Sivashinsky 方程式の確率微分方程式近似, 日本機械学会関西支部第 86 期定時総会講演会, 2011.
- ② 石田秀士, 岡本友里子, 河原源太, (タイトル同じ), 第 6 回非線形テクノサイエンス講演会, 2011.
- ③ 芝本篤志, 石田秀士, 河原源太, Kuramoto-Sivashinsky 方程式の確率微分方程式近似に関する数値積分による検討, 機械学会関西支部第 88 期定時総会講演会, 2013.
- ④ H. Ishida, A. Shibamoto, G. Kawahara, Optimal coefficients of noisy Burgers equation modeled on the Kuramoto-Sivashinsky equation, XXV IUPAP International Conference on Statistical Physics, Seoul National University, Korea, 2013.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等 なし

6. 研究組織

(1)研究代表者

石田秀士 (ISHIDA, Hideshi)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・助教

研究者番号: 80283737