

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 29 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～ 2012

課題番号：22650057

研究課題名（和文）ゲーム論的確率論による予測理論の開拓

研究課題名（英文）Study of prediction theory based on game-theoretic probability

研究代表者

竹村 彰通（TAKEMURA AKIMICHI）

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号：10171670

研究成果の概要（和文）：Shafer と Vovk によるゲーム論的確率論は、賭けゲームの設定のみから大数の強法則や中心極限定理などを含む確率論の厳密な理論を構成しているが、本研究ではゲーム論的確率に基づき、多項モデルの価格づけ公式の再構成、確率予測に対する回帰分析手法を応用した戦略の提案、重複対数法則が成立するための新たな十分条件、などさまざまな成果を得た。

研究成果の概要（英文）：The game-theoretic probability initiated by Shafer and Vovk reconstructs the probability theory based only on protocols of games. In this study we obtained many results in this framework, such as reconstruction of pricing theory in multinomial games, probability forecasting based on regression, and new sufficient condition for the law of iterated logarithm.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学、統計科学

キーワード：統計的予測・制御、ゲーム論的確率論

1. 研究開始当初の背景

ゲーム論的確率論は、Glenn Shafer と Vladimir Vovk による 2001 年の著書 "Probability and Finance: It's Only a Game!", Wileyによって確立された。この本の出版後、竹村は、竹内啓氏および公文雅之氏と共同でゲーム論的確率論の研究を進めて来た。また Shafer 氏および Vovk 氏との共同研究も進めていた。竹内・公文との共同研究においては、有効な賭け戦略がベイズ予測方式として得られることをいくつかの論

文で示してきた。また Shafer-Vovk との共同研究においては defensive forecasting とよばれる予測方式を提案していた。本研究は、このような当初の研究背景のもとで、ゲーム論的確率論に基づく予測理論の一般論を展開することを目指して開始された。ゲーム論的確率論が著書の形で発表されてから 10 年が経過した。その間、Shafer-Vovk のグループおよび竹村のグループでは多くの研究成果が得られ、理論の整備が進んでいる。ゲーム論的確率論はまだ測度論的確率論研究者

からは認知されていない状況ではあるものの、確率の哲学的基礎に興味を持つ研究者やコルモゴロフ複雑度の研究者からは認知されるようになって来ている。

2. 研究の目的

Shafer と Vovk によるゲーム論的確率論の枠組みにおいては、確率構造がゲームのプロトコルによって部分的にのみ指定されており、賭けゲームにおける賭け戦略に基づいて測度論を用いることなく確率論の基礎づけを与える理論である。賭け戦略は必然的に予測をとまなうため、ゲーム論的確率論により予測理論における新たな展開が可能となる。その一つの具体的な手順が **defensive forecasting** とよばれる手法である。本研究では、**defensive forecasting** を基盤とする予測理論を開拓することを目的とする。

3. 研究の方法

本研究は、竹内啓氏および公文雅之氏との共同研究の形でおこなう。周知のように竹内啓氏は幅広い見識と卓越したオリジナリティーを有し、我々の共同研究において本質的なアイデアを多く提供している。公文雅之氏は情報幾何学や情報理論に造詣が深く、ゲーム論的確率論に本質的な形で現れるカルバック・ライブラー情報量などの解析にすぐれている。公文氏は論文執筆などの具体的な作業において実質的な役割をはたしており、本申請においても実質的な研究推進の役割をはたしている。また、本研究の構想は、竹村と Vladimir Vovk, Glenn Shafer との共著にも基づくものであり、引き続き Vladimir Vovk 氏と Glenn Shafer 氏と連絡をとりながら、本研究を推進していく。ゲーム論的確率論のゲームの設定では、確率分布を完全に指定したり独立性を仮定することなく、ゲームのプロトコルの中で少数の条件つきモーメントの存在のみを仮定し、そのもとで有効な賭け戦略を用いて結果を導く。このことから、**defensive forecasting** によって、確率構造が部分的にのみ指定されている設定における汎用的な予測方式が導出できる。

4. 研究成果

本研究を通じて以下のような研究成果を得た。

(1) 測度論的確率論において、コルモゴロフの 0-1 法則は、標準的な教科書でもとりあげられる基本的な結果であるが、それをさらに一般化したレビーの 0-1 法則もよく知られている。0-1 法則をゲーム論的確率論で再

解釈すると、裾事象の上確率が 0 か 1 しかとらないという形で定式化することができる。いくつかのゲーム論的プロトコルにおいて、レビーの 0-1 法則がゲーム論的枠組みに一般化されることを示した。このことにより、ゲーム論的確率論で定義される上確率と下確率がどのような時に乖離するかなどの現象も明らかにした。

(2) ゲーム論的確率論においては、賭け比率を一定とする戦略が基本的な役割をはたすが、特定の比率のみを用いるだけでは良い性能を達成することはできず、さまざまな比率を組み合わせることが必要とされる。一つの方法は、初期資金をある確率分布に従って分配することであり、これはベイズ的な戦略を導く。もう一つの方法は、最尤法の考え方に従って、ゲームの進行にともなって賭け比率を徐々に変化させていく手法である。賭けの対象となる価格系列が複数ある場合においては、後者はポートフォリオの動的な最適化に対応する。最尤推定量に関して知られている性質を用いると、後者の方法が賭け戦略としても非常によい性能を持つことを示した。

(3) 2 項モデル (Cox-Ross-Rubinstein) と異なり、3 項モデルあるいはさらに多項モデルにおいては、厳密な複製戦略が存在しないために、上価格と下価格の間に乖離が生じる。しかも、上価格および下価格は、多時点のゲームにおいては、後ろ向きの帰納法によって数値的に求める必要があり、厳密な解析は困難である。この問題に対して、我々は中心極限定理と同様の操作によって、上価格の満たす偏微分方程式を考察し、この偏微分方程式が Black-Scholes-Barenblatt 方程式とよばれる方程式と一致することを示した。

(4) ゲーム論的確率論における大数法則の証明は、測度論的確率における議論と同様に Kronecker の補題を用いるのが標準的である。Kronecker の補題を用いるためには random series の収束を示す必要がある。ゲーム論的確率論ではこれまで大数法則のさまざまな収束レートが得られてきたが、random series の収束のレートを明示的に導出した研究はなされてこなかった。この問題に対して我々は、二乗ヘッジさらにはより一般のヘッジの存在するゲームにおいて、random series の収束に関する一般的な結果を得た。さらにゲームのプレーヤーである Reality の確定的な戦略を構成する一般的な方法を導出した。

(5) 2 値の現状 (例えば雨が降るか降らないか) に対する確率予測 (例えば気象庁による降雨確率の予測) は、時系列解析の対象としてこれまでも興味を持たれて研究されて来

たが、これをゲーム論的確率論の観点から考察することにより、確率予測の良さの定量的な評価が可能となる。確率予測の統計的モデルとして、ロジスティック回帰モデルをベースとした賭け戦略を考えると、統計的推測理論の諸結果をゲーム論的確率論の観点から応用することが可能となり、性能のよい賭け戦略が得られる。賭け戦略の応用により、気象庁の予測には50%に近い予測値を出すというバイアスの存在することも明らかとなった。

(6) 重複対数の法則は、測度論的確率論の中でも証明がかなり困難な深い定理であるが、ゲーム論的確率論においては前提する仮定がより少ないために、定理の結果そのものがより複雑となり証明も困難となる。Shafer and Vovk (2001)の本に与えられているゲーム論的な重複対数定理も非常に理解が困難である。宮部と竹村は、二乗ヘッジよりわずかに強いヘッジが存在する場合には、重複対数の法則において、上限(validity)および下限(sharpness)が一致することを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

1) Kenshi Miyabe and Akimichi Takemura, (2013)、The law of the iterated logarithm in game-theoretic probability with quadratic and stronger hedges、Stochastic Processes and their Applications、doi:10.1016/j.spa.2013.03.018. 査読有

2) Masayuki Kimono, Jing Li, Akimichi Takemura and Kei Takeuchi, (2013)、Bayesian logistic betting strategy against probability forecasting、Stochastic Analysis and Applications、31、214-234、査読有

3) Kenshi Miyabe and Akimichi Takemura, (2012)、Convergence of random series and the rate of convergence of the strong law of large numbers in game-theoretic probability、Stochastic Processes and their Applications、122、1-30、査読有

4) Ryuichi Nakajima, Masayuki Kumon, Akimichi Takemura and Kei Takeuchi, (2012)、Approximations and asymptotics of upper hedging prices in multinomial models、Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics、25、1-21 査読有

5) Glenn Shafer, Vladimir Vovk and Akimichi Takemura, (2012) Levy's zero-one law in game-theoretic probability、Journal of Theoretical Probability、25、1-24、doi: 10.1007/s10959-011-0390-3、査読有

6) Masayuki Kumon, Akimichi Takemura and Kei Takeuchi, (2011)、Sequential optimizing strategy in multi-dimensional bounded forecasting games、Stochastic Processes and their Applications、121、155-183、査読有

7) Kei Takeuchi, Masayuki Kumon and Akimichi Takemura, (2010)、Multistep Bayesian strategy in coin-tossing games and its application to asset trading games in continuous time、Stochastic Analysis and Applications、28、842-861、査読有

8) Kei Takeuchi, Akimichi Takemura and Masayuki Kumon, (2010)、New procedures for testing whether stock price processes are martingales、Computational Economics、37、67-88、査読有

[学会発表] (計5件)

1) Akimichi Takemura、Bayesian logistic betting strategy against probability forecasting、The Fourth Workshop on Game-Theoretic Probability and Related Topics、2012年11月12日～2012年11月14日、東京大学

2) 宮部 賢志・竹村 彰通、独立分布でない場合の大数の法則の収束測度—ゲーム論的確率論からのアプローチ、2012 日本数学会、平成24年3月27日、東京理科大学 神楽坂キャンパス

3) Akimichi Takemura、Martingales and sequential tests from the viewpoint of game-theoretic probability、Stanford stat seminar、August 4、2011、Stanford University、California、USA

4) 公文雅之、竹村 彰通、竹内 啓、Sequential optimizing strategy in multi-dimensional bounded forecasting games、日本数学会・2010年度秋季総合分科会、9月22日～9月25日、名古屋大学千種キャンパス

5) 竹村 彰通 ゲーム論的確率論の最近の発展について、科学研究費集会「計算代数手法に基づく数理統計学の展開」、2010年7月

23日～24日、2010年7月23日～24日、大宮ソニックシティー

[その他]

ホームページ等

http://park.itc.u-tokyo.ac.jp/atstat/atshop/projects_links.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹村 彰通 (TAKEMURA AKIMICHI)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・
教授

研究者番号：10171670

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：