

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 5日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2012

課題番号：22654004

研究課題名（和文）

交代符号行列の Lie 理論

研究課題名（英文）

Lie theory for alternating sign matrices

研究代表者

岡田 聡一 (Soichi OKADA)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号：20224016

研究成果の概要（和文）：この研究では、half-turn symmetric な交代符号行列の構造を解析した。一方で、Pin 群の既約 spinor 表現の行列式表示を与え、整数環に $e^2 = 1$ をみたく元を付け加えた環に係数をもつ対称関数の族（spinor 表現の普遍指標）を導入した。そして、この対称関数の性質を調べ、その応用として spinor 表現のテンソル積や部分群への表現の既約分解（既約表現の重複度）を組合せ論的に計算する手法を与えた。

研究成果の概要（英文）：We investigate the structure of the set of half-turn symmetric alternating sign matrices. Also we give a determinantal formula for irreducible spinor representations of the Pin group, and introduce a family of symmetric functions (spinor universal characters) with coefficients in the ring of integers adjoining a new element e with the property $e^2 = 1$. And we investigate their properties, and describe a combinatorial method for the irreducible decompositions of tensor products and restrictions involving spinor representations of the Pin group.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	0	1,100,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	2,700,000	480,000	3,180,000

研究分野：組合せ論，表現論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：交代符号行列，古典群，対称関数

1. 研究開始当初の背景

交代符号行列 (alternating sign matrix) とは、 $\$1$, $\$0$, $\$-1$ を成分とする正方行列で、各行、各列の成分の和がすべて $\$1$ であり、各行、各列において $\$1$ と $\$-1$ が交互に現れるようなものである。交代符号行列は、Robbins-Rumsey によって、行列式を計算する Dodgson のアルゴリズム (condensation of determinant) に関する研

究の中から発見され、その後組合せ論の研究者を中心に、さらに最近では数理物理学の研究者も交えて、研究が進んできた。

その中で、交代符号行列は次のようなさまざまな側面をもつことが明らかになってきた。

- 交代符号行列は、置換行列 (A 型 Weyl 群の元) の一般化である。(成分に $\$-1$ をもたない交代符号行列は置換行列である。)

- 交代符号行列を用いて、パラメーターを含むような行列式の一般化 (λ 行列式) が定義でき、A 型の Weyl の分母公式の変形が得られる. (D. Robbins and H. Ramsey, Adv. Math. 62 (1986).)
- さらに、交代符号行列の拡張を用いて、Schur 関数 (一般線型群の既約指標) の変形が得られる. (T. Tokuyama, J. Math. Soc. Japan 40 (1988), S. Okada, J. Combin. Theory Ser. A 53 (1990).)
- 交代符号行列全体には、1 対 1 に対応する monotone triangle を経由して、自然な半順序集合の構造が入り、対称群上の Bruhat 順序の MacNeille 完備化となる. (A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, Electron. J. Combin. 3 (1996).)
- n 次交代符号行列の個数が、分割 $(n-1, n-1, n-2, n-2, \dots, 1, 1, 0, 0)$ に対応する一般線型群 GL_{2n} の既約表現の次元の $3^{\lfloor n(n-1)/2 \rfloor}$ 倍で与えられる. (S. Okada, J. Algebraic Combin. 23 (2006).)

これらの側面は、いずれも交代符号行列が A 型の対象であることを示唆している. また、B, C 型の Weyl の分母公式の変形も研究代表者や Hamel-King によって与えられている. さらに、研究代表者によって、対称性を課した交代符号行列の個数も古典群の既約表現の次元を用いて与えられることが示されている.

Lie 理論の観点から見れば、他の型 (例えば、B 型、あるいは E 型) に対応する交代符号行列とは何であるか、を考えることは自然であるが、これまでこのような研究はなされていなかった.

2. 研究の目的

この研究は、究極的には、交代符号行列を Lie 理論の中で捉えなおすことにより、交代符号行列にまつわるさまざまな現象を統一的に理解し、さらにその一般化、その背後にある幾何的対象を見出すことを目指すものである.

特に、この研究期間における研究では、

- B 型の交代符号行列の Lie 理論的な定義を目指して、B 型 Weyl 群の拡張としての half-turn symmetric な交代符号行列の構造を解析すること、
- 交代符号行列の数え上げに現れる古典群の特別な表現の構造が解析できるよ

うに、古典群 (特に Pin 群の spinor 表現) に対する普遍指標の理論を整備することなどを目的とした.

3. 研究の方法

Half-turn symmetric な交代符号行列の研究では、半順序集合としての構造、対応する square ice model の分配関数の解析を中心に研究を進めた. Spinor 表現に対する普遍指標の理論の整備では、関連する対称関数の解析を中心に研究を進めた.

国内で開催されるさまざまな研究集会、セミナーや、

- Workshop on Whittaker Functions, Crystal Bases, and Quantum Groups, Banff Center, Banff, Canada, 2010 年.
 - Conference on Combinatorics and Mathematical Physics, University of Queensland, Brisbane, Australia, 2010 年.
 - 22nd International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, San Francisco State University, San Francisco, U.S.A., 2010 年.
 - International Conference on Asymptotics and Special Functions, City University of Hong Kong, Hong Kong, 2011 年.
 - 23rd International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, University of Iceland, Reykjavik, Iceland, 2011 年.
 - 2012 Shanghai Conference on Algebraic Combinatorics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China, 2012 年.
- などの海外で行われた研究集会に参加し、講演、情報交換、討論などを行った. また、2012 年度には、7 月 30 日～8 月 3 日に名古屋大学において国際研究集会 “Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC’12)” を、8 月 6 日～10 日に国際高等研究所において合宿型セミナー “ヤング図形・統計物理に関連した代数的組合せ論” を、8 月 28 日～31 日に組合せ論サマースクールを開催した.

4. 研究成果

Half-turn symmetric な交代符号行列の構造の解析については、monotone triangle を経由することにより、half-turn symmetric な交代符号行列全体のなす集合に分配束の構

造が入り，この分配束が B 型 Weyl 群の Bruhat 順序を部分半順序集合として含んでいることを明らかにした。また，サイズが小さい場合に，B 型 Weyl 群の半直積分解に対応するような half-turn symmetric な交代符号行列の分解の候補を見出した。一般の場合については現在も研究を進めている。

Pin 群の spinor 表現の普遍指標については，理論をほぼ完成することができた。この研究で扱ったのは，複素数体上の N 次直交群 O_N の 2 重被覆群である Pin 群 Pin_N (Spin 群ではない) の表現のうち， O_N を経由しない表現 (spinor 表現) である。そして，この研究で得られた結果は大きく次の 3 つに分けることができる。

- (1) 既約 spinor 表現の指標の行列式による表示。
- (2) Spinor 表現に対する普遍指標の導入とその組合せ論的性質の解明。
- (3) Twisted central product の表現論の整備とその spinor 表現への応用。

まず，(1) については， Pin_N のスピン表現 ($2^{\lfloor N/2 \rfloor}$ 次元) の指標を Δ_N と表し， O_N の自然表現の k 階対称テンソル積表現， k 階交代テンソル積表現の指標をそれぞれ H_k ， E_k と表すとき，長さ $N/2$ 以下の分割 λ に対して，

$$\Delta_N \cdot \det \left(\begin{array}{c} H_{\lambda_i - i + j} \\ - E_N H_{\lambda_i - i - j + 1} \end{array} \right)$$

によって与えられる Pin_N 上の類関数が， Pin_N の既約指標を与えることを証明した。

次に，(2) については，整数環に $e^2 = 1$ をみたす元を付け加えた環上の対称関数環の中に spinor 表現に対する普遍指標を定義し，Cauchy 型の公式，普遍指標の積の分解，普遍指標の特殊化写像による像の計算方法などを与えた。そして，その応用として，既約 spinor 表現のテンソル積の分解を組合せ論的に計算する方法を導いた。

さらに，(3) については， $M+N$ 次直交群 O_{M+N} の部分群 $O_M \times O_N$ に対応する部分群が， Pin_M と Pin_N の (直積群ではなく) twisted central product $\text{Pin}_M * \text{Pin}_N$ になることを示し，twisted central product の表現論を整備することに

よって， Pin_{M+N} の既約 spinor 表現を $\text{Pin}_M * \text{Pin}_N$ に制限したときの既約分解を組合せ論的に計算する方法を与えた。

Pin 群 Pin_N の既約 spinor 表現を， O_N に含まれる一般線型群に対応する部分群に制限したときの既約分解をより対称性の高い形で記述することが残された課題である。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

[1] Masao ISHIKAWA and Sochi OKADA, Identities for determinants and Pfaffians, and their applications, Sugaku Expositions, 掲載決定。(査読有)

[2] 岡田 聡一, (q,t)-Hook formulae, 数理解析研究所講究録「組合せ論的表現論とその周辺」, 掲載決定。(査読無)

[3] 岡田 聡一, Pfaffian identities and their applications, 2012 年表現論シンポジウム講演集, pp.69--91, 2012。(査読無)

[4] Masahiko ITO and Soichi OKADA, An application of Cauchy--Sylvester's theorem on compound determinants to a BC_n-type Jackson integral, in "Partitions, q-Series and Modular Forms", pp.145--157, 2011。(査読有)

[5] 岡田 聡一, Spinor representations and symmetric functions, 2011 年表現論シンポジウム講演集, pp.129--141, 2011。(査読無)

[6] S. Okada, (q,t)-Deformations of multivariate hook product formulae, J. Algebraic Combin. 32 (2010), 399--416. (査読有)

[7] 岡田 聡一, (q,t)-Deformations of multivariate hook product formulae, 数理解析研究所講究録 1689 (2010)「表現論と組合せ論」, 33--46。(査読無)

[8] 石川 雅雄, 岡田 聡一,
行列式・パフィアンに関する等式とその表現
論, 組合せ論への応用,
数学 62 (2010), 85--114. (査読有)

[学会発表] (計 10 件)

[1] 岡田 聡一,
Pfaffian identities and their
applications,
2012 年表現論シンポジウム 2012 年 12 月
5 日, 鹿児島マリパレス, 鹿児島. (招待
講演)

[2] 岡田 聡一
(q, t)-Hook formulae,
組合せ論的表現論とその周辺, 2012 年 10
月 10 日, 京都大学数理解析研究所, 京都.

[3] Soichi OKADA,
Symmetric functions and branching rules
for spinor representations,
2012 Shanghai Conference on Algebraic
Combinatorics, 2012 年 8 月 18 日,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai,
China. (招待講演)

[4] Soichi OKADA,
Symmetric functions and spinor
representations,
Representation Theory of Chevalley Groups
and Related Topics, 2012 年 3 月 12 日,
名古屋大学, 名古屋. (招待講演)

[5] 岡田 聡一,
Symmetric functions and spinor
representations,
2011 年度表現論シンポジウム, 2011 年 11
月 10 日, 国民宿舎紀州路みなべ, 和歌山.

[6] Soichi OKADA,
Two-parameter deformations of
multivariate hook product formulae,
International Conference on Asymptotics
and Special Functions, 2011 年 6 月 1 日,
City University of Hong Kong, Hong Kong.

[7] Soichi OKADA,

Universal characters for spinor
representations,
Conference on Combinatorics and
Mathematical Physics, 2010 年 7 月 13 日,
University of Queensland, Brisbane,
Australia. (招待講演)

[8] 岡田 聡一,
Symmetric functions and spinor
representations,
Diagram 代数とその周辺, 2010 年 7 月 7
日, カルチャーリゾートフェストーネ, 沖縄.
(招待講演)

[9] Soichi OKADA
Universal characters for spinor
representations,
SIAM Conference on Discrete Mathematics,
2010 年 6 月 17 日, Hyatt Regency Austin,
Austin, U. S. A.

[10] Soichi OKADA,
Symmetric functions and spinor
representations,
Workshop on Whittaker Functions, Crystal
Bases, and Quantum Groups, 2010 年 6 月
10 日, Banff Center, Banff, Canada. (招
待講演)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡田 聡一 (Soichi OKADA)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
教授
研究者番号: 20224016

(3) 連携研究者

石川 雅雄 (Masao ISHIKAWA)
琉球大学・教育学部・教授
研究者番号: 40243373