

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 5日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010 ~ 2012

課題番号：22654007

研究課題名（和文）

非正曲率空間の幾何学と数理計画法

研究課題名（英文）

Geometry of nonpositively curved spaces and the mathematical programming

研究代表者

納谷 信 (NAYATANI SHIN)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：70222180

研究成果の概要（和文）：代数群 $PGL(3, \mathbb{Q}_p)$ (p は素数) に付随する2次元ユークリッド的ビルディングの頂点における接錐の不変量 δ の厳密値を決定することを目標とし、 $p=2$ の場合を詳しく考察した。問題は、ある14次実対称行列を適切に変形する問題として定式化され、この行列は9個の未知パラメータ(1変数関数)を含むが、このうち6個のパラメータを決定することができた。

研究成果の概要（英文）：We studied toward determining the rigorous values of the invariant δ of the tangent cones at vertices of the Euclidean building associated with the algebraic group $PGL(3, \mathbb{Q}_p)$, where p are primes, and observed the $p=2$ case in detail. The problem is formulated as that of deforming a certain real symmetric matrix properly, and this matrix has 9 unknown parameters (functions of 1 variable). We determined 6 parameters of these.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	700,000	0	700,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
総計	1,700,000	300,000	2,000,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：不変量 δ 、ビルディング、数理計画法、ユークリッド空間への埋め込み

1. 研究開始当初の背景

マルグリスは、1970年代に、ある種の代数群の格子（離散部分群で、基本領域が有限体積をもつもの）が超剛性とよばれる極めて強い剛性をもつことを、主にエルゴード理論の手法を用いて証明した。この定理は、そのような格子の幾何学的空間への作用が極めて限定されることを意味している。

申請者は、代数群に付随する空間がユークリッド的ビルディングである場合に、こ

のマルグリスの定理の幾何学的別証明を与えることを主な動機として、井関裕靖氏（東北大学理学研究科・准教授、現在、慶応義塾大学・教授）と共同で、離散群の剛性の組合せ調和写像という幾何学的手法による研究を行い、その中で $CAT(0)$ 空間（曲率が0以下の測地的距離空間）のある幾何学的不変量（以下、不変量 δ として引用する、0以上1以下の値をもつ）を定式化した。そして、この研究に続く井関氏、近藤剛史

氏（神戸大学理学研究科・GCOE 研究員、現在、東北大学原子分子材料科学高等研究機構・助教）との共同研究において、この不変量が 1 より小さい定数によって上から一様に抑えられた $CAT(0)$ 空間の族を考えると、この族に属するすべての $CAT(0)$ 空間に固定点性質をもつ離散群が豊富に存在する（実際、ある種のランダム群がこの性質をもつ）ことを明らかにした。ここで、離散群が距離空間に固定点性質を持つとは、離散群の距離空間への任意の等長的作用が、距離空間のある点を固定することをいう。この性質は、そのような離散群の作用が極めて退化したものに限られることを意味しており、離散群が強い剛性を持つことの現れであると考えられる。

2. 研究の目的

上述の先行研究をふまえると、与えられた $CAT(0)$ 空間、あるいはその族の不変量 δ を上から評価することが重要な問題となるが、現在までの研究においては、 δ の有用な評価が得られている場合はあるものの、その正確な値が知られている例は、 $\delta=0$ となる場合以外には知られていない。そこで、本研究においては、 $CAT(0)$ 空間の不変量 δ を評価・計算する手法を確立し、特殊な $CAT(0)$ 空間の場合にこの不変量の値に関する予想を解決することである。さらに、応用として、マルグリス超剛性定理の幾何学的な別証明を、特別な場合に与えることを目指す。具体的には、代数群 $PGL(n, \mathbb{Q}_p)$ (\mathbb{Q}_p は p 進体) に付随するユークリッド的ビルディング $Y_{\{n,p\}}$ の不変量 δ を評価し、できれば厳密値を決定する。

3. 研究の方法

一般に、 $CAT(0)$ 空間の δ の評価・計算は、その接錐の δ の評価・計算に帰着されるので、 $Y_{\{n,p\}}$ の接錐 $T_{\{n,p\}}$ の δ の評価・計算を目指すことになる。 $n=2$ の場合は比較的容易ですでに解明済みである。 $n=3$ の場合は $\delta(T_{\{3,p\}}) < 3/4$ という評価が得られており、 $\delta(T_{\{3,p\}})$ の厳密値について予想が立っている。本研究においては、まず、 $n=3$ の場合に上述の予想を正当化することを目標とする。その過程において、理論的に厳密値を求める試みと平行して、数理計画法の手法を用いて δ を数値的に計算する。

$p=2$ の場合により具体的に述べると、問題は、接錐上の与えられた測度に応じて、 $PGL(3, \mathbb{F}_2)$ に付随する 1 次元球面的ビルディング（一般化された三角形ともよばれる）の 14 次元ユークリッド空間への局所等長的な埋め込みを適切に構成する問題として定式化される。頂点集合上に台にもつ重み一定の測度の場合には、そのような埋め

込みで最良のものを井関裕靖氏との共同研究において構成したが、これは 7 次元ユークリッド空間への埋め込みとなっている。我々の問題は、この埋め込みをずっと退化した 3 次元ユークリッド空間へのある埋め込みまで適切に変形する問題に帰着されると考えられ、その方向で研究を進める。

4. 研究成果

マルグリス超剛性定理の幾何学的証明という問題を念頭において、 $PGL(3, \mathbb{Q}_p)$ (p は素数) に付随する 2 次元ユークリッド的ビルディングの頂点における接錐の不変量 δ の厳密値を決定することを目標とし、 $p=2$ の場合を詳しく考察した。上述したように、 $p=2$ の場合、問題は、 $PGL(3, \mathbb{F}_2)$ に付随する 1 次元球面的ビルディングの 7 次元ユークリッド空間へのある埋め込みをずっと退化した 3 次元ユークリッド空間へのある埋め込みまで適切に変形する問題に帰着される。この変形問題はある 14 次元実対称行列を適切に変形する問題として定式化されるが、この行列は 9 個の未知パラメータ (1 変数の関数) を含んでおり、このうち 6 個のパラメータを決定することができた。実際、4 個は表現論を使うことによって決定でき、さらに 2 個は数値計算によって線形関数であることが確かめられた。残り 3 個のパラメータについて、計算機による数値計算を実行して、パラメータの精密な予測を行ったが、厳密値の特定には至っていない。

そこで、最終年度後半に方針を変更し、表現論が適用できないパラメータはすべて線形関数であると仮定し、一方、パラメータの変数を 2 個に増やして、表現論の適用できるパラメータを改めて決定し直す方向で研究を進めた。2 個のパラメータの間の関係式を決定して、最終的にはパラメータを 1 変数関数として決定することを目指している

この研究は、豊田哲氏(名古屋大学高等教育研究センター、現鈴鹿高専・助教)との共同研究である。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

納谷信

調和写像と超剛性・固定点性質
数理解析研究所講究録 1720 (2010)
112—138.

納谷信、井関裕靖

An approach to superrigidity and fixed-point theorems via harmonic maps
AMS Translations 230 (2010), 135—160.

納谷信、井関裕靖、近藤剛史

N-step energy of maps and fixed-point property of random groups
Groups, Geometry, and Dynamics 6 (2012), 701—736.

[学会発表] (計 14 件)

納谷信

調和写像と超剛性・固定点性質
RIMS 研究集会「調和写像論の深化と展望」
2010 年 6 月 3 日

京都大学数理解析研究所

納谷信

四元数 CR 幾何における可積分性
福岡大学微分幾何研究会
2010 年 10 月 8 日

福岡大学セミナーハウス

納谷信

Quaternionic CR geometry
Workshop on Parabolic Geometry

2010 年 11 月 2 日

東京大学玉原セミナーハウス

納谷信

離散群の剛性への幾何学的アプローチ
仙台シンポジウム (招待講演)

2011 年 8 月 18 日

東北大学情報科学研究科

井関裕靖

ランダム群の固定点性質

仙台シンポジウム2011

2011 年 8 月 18 日

東北大学情報科学研究科,

納谷信

Deformation of polyhedra towards
Margulis superrigidity

福岡大学微分幾何研究会

2011 年 11 月 5 日

福岡大学セミナーハウス

井関裕靖

Coxeter polyhedra in hyperbolic spaces

福岡微分幾何学研究会

2011年11月6日

福岡大学セミナーハウス

納谷信

Deformation of polyhedra towards
Margulis superrigidity

極小曲面と幾何構造 (招待講演)

2012 年 3 月 6 日

名城大学

納谷信

Quaternionic CR geometry

第 18 回複素幾何シンポジウム (招待講演)

2012 年 10 月 27 日

信州菅平高原プチホテルゾンタック

納谷信

Quaternionic contact/CR geometry

福岡大学微分幾何研究会 (招待講演)

2012年11月3日

福岡大学セミナーハウス

井関裕靖

ランダム群の L^p 空間に対する固定点性質

福岡微分幾何研究会

2012年11月3日.

福岡大学セミナーハウス

納谷信

Fixed-point property of infinite groups

Discrete Geometry and Dynamical

Systems (招待講演)

2013 年 1 月 25 日

京都大学

納谷信

Rumin 複体に対するシャープな Bochner 公

式を目指して

距離の幾何学探求勉強会

2013 年 03 月 18 日

琵琶湖コンファレンスセンター

納谷信

Fixed-point property of infinite groups

第5回国際ワークショップ「微分幾何学と
幾何解析」(招待講演)

2013年03月27日

大阪市立大学

6. 研究組織

(1)研究代表者

納谷 信 (NAYATANI SHIN)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究
科・教授

研究者番号：70222180

(3)連携研究者

井関 裕靖 (IZEKI HIROYADU)

慶応義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：90244409

小林俊公 (KOBAYASHI TOSHIMASA)

摂南大学・理工学部・講師

研究者番号：30399125