

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 1 日現在

機関番号：22604

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2011

課題番号：22654010

研究課題名（和文）可積分系の幾何学と可視化および量子場の理論と脳神経科学への応用

研究課題名（英文）Geometry and visualization of integrable systems and applications to quantum field theory and neuroscience

研究代表者

Martin Guest(マーティン ゲスト)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：10295470

研究成果の概要（和文）：ある種の微分方程式は幾何学と可積分系の理論の観点から研究が行われている。そのような微分方程式の解は隣り合った質点の間に非線形の相互作用が働く格子モデルの運動としてシミュレートし、可視化することができる。量子場理論からの重要な例として、Cecotti と Vafa によって研究が始められた tt^* 戸田格子がある。Guest は C.-S. Lin との共同研究で解の存在に関する理論的な結果を得た。この結果はコンピュータによるシミュレーションとも合致する。蔵本格子などその他の例について現在研究中である。シンクロナイゼーションの数学的な解釈などへの更なる応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：Certain differential equations are studied from the point of view of geometry and the theory of integrable systems. The solution of such an equation can be simulated, and visualized, as the motion of a lattice of point masses with nonlinear interactions between neighbouring masses. An important example from quantum field theory is the tt^* -Toda lattice, first studied by Cecotti and Vafa. Guest and Lin have obtained theoretical results on the existence of solutions, consistent with computer simulations. Other examples such as the Kuramoto lattice are being studied. Future applications, e. g. to the mathematical interpretation of synchronization, are anticipated.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,100,000	0	1,100,000
2011 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,200,000	330,000	2,530,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何・可積分系

1. 研究開始当初の背景

1950 年代に Enrico Fermi, John Pasta,

Stanislaw Ulam, Mary Tsingou らによって行われた非線形格子の研究は、後世の研究に最

も大きな影響を与えた数値実験の一つであろう。彼らは世界初の電子計算機の一つであるロスアラモス研究所の MANIAC コンピュータを使って非線形の力が働く格子モデルのシミュレーションを行った。物理的な直観からはこのような非線形格子の運動は時間の経過とともにしだいに乱れ、最終的には「熱平衡化」が起こると予想されていた。しかし、彼らの実験によると、実際には熱平衡化は起こらず、「周期的に近い」運動をするという驚くべき結果が得られた。

FPUの実験に対する理論の研究は1970年代の「ソリトン」の発見につながり、さらに可積分系の理論へと発展した。可積分系の理論は、現在、幾何学との深い関わりから活発に研究されている分野であり、有限次元および無限次元Lie理論を使った解析学や代数幾何学および微分幾何学とも深く関連している。また、量子場の理論においてその数学的基盤として重要な役割を果たしている。「実験数学」の最初の例の一つであるFPUの実験は数学および物理学の理論に大きな進展をもたらしただけでなく、数多くの重要な応用につながった。

この50年の間に応用数学者と物理学者によって、高速コンピュータによる数値シミュレーションなどFPU格子に関する多くの研究が行われた。また、可積分系に関して純粋数学者、応用数学者および物理学者により多くの理論的な研究がなされた。例えば戸田格子は可積分系の理論においてよく研究されている例として挙げられる。この分野は現在でも活発に研究が進められており、ときに論議が巻き起こることもある。それは戸田格子などの可積分系とFPU格子などの非可積分系との関係がよく理解されないためである。そこで本研究課題において実験と理論の両面からこの関係を調べることを計画した。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は可積分系と非可積分系の関係の新しい理論の構築に向けて計算機実験と理論的考察の両面からアプローチすることである。海外研究協力者の Richard Palais (California 大学)と協力し、幾何学の最近の進展によって動機付けられた格子モデルに対する新しいコンピュータ実験を行う。具体的な応用の一つとして、理論物理学において現在関心が持たれている位相的・反位相的融合 (topological-antitopological fusion) 方程式を研究することを目標とする。さらに、格子モデルに似た脳神経モデルの方程式への応用の可能性を探求する。

少々荒っぽい解釈ではあるが、FPUの実験の「周期性」はKolmogorov-Arnold-Moser (KAM)理論とソリトン理論によってそれぞれ独立

に説明することができる。KAM理論は完全可積分なハミルトニアン系に「十分近い」系は何らかの予測可能な振る舞いをするということを主張している。この意味でFPU格子は戸田格子に「近い」と思われる。ソリトン理論はKorteweg-de Vries (KdV)方程式などのある種の非線形波動方程式の特殊な解(ソリトン)の研究である。ソリトン解は非常に安定した振る舞いをする。FPU格子の微分方程式系はKdV方程式の離散近似とみなすことができるので、ソリトンに似た解をもつと予想される。これら二つの説明は可積分系による非可積分系の「近似」の概念に相当するが、この近似理論を体系として構築することが最終的な目標である。また、理論物理と脳神経科学への二つの応用、さらに曲面論におけるベルリングループのような数学的可視化プロジェクトを日本において立ち上げることを目的とする。このような方向で可積分系の理論の幾何学的側面の研究に寄与することが本研究課題の目的である。

3. 研究の方法

本研究課題では大きく以下の3つの方法によって研究を行った。

(A) 3D-XplorMathのJava版に格子モデルの可積分性と非可積分性を調べるための研究ツールとしての機能を追加した。改良を加えた3D-XplorMathのJava版を使ってFPUのオリジナルの実験を再現させた。プログラミングはSinclairが中心となって行った。

(B) 厳密な数学的観点からの可積分な非線形系による非可積分系の「近似」に関する研究を行った。FPUの実験は格子の「ノーマルモードのエネルギー」に基づいている。大雑把に述べると、これらはエネルギーの「フリーエ係数」に相当するが、厳密にはノーマルモードは線形系においてのみ存在する保存量である。FPUの実験では、非線形格子について線形格子のノーマルモードを計算した。これは保存量にはならないが、格子の運動が定常状態に近いならば、これらのノーマルモードの時間変化が非線形系についての情報を含むと予想される。ノーマルモードはFPU系を近似する線形系の保存量であるのに対し、他の近似系の保存量について調べた。例えば、戸田格子はFPU系の別の近似であるが、戸田格子はそれ自身の保存量をもつ完全可積分系である。FPU系に対して戸田格子の保存量を計算し、それらが有益な情報を含むかどうかを調べた。

(C) 上述の最近の数学的進展によって示唆された新しい実験、特に戸田格子方程式や位

相的・反位相的融合方程式 (tt*方程式) の数値解析を行った. ノーマルモードは特別な座標の選び方と解釈することができる. 完全可積分系の場合には, 作用角度座標が標準的な座標のとり方であるが, 違う座標のとり方が有効な場合がある. 例えば, J. Moser によって作用角度座標を生成するように作られた新しい座標は, 最近発見された (非周期的) 戸田格子の「超可積分性」という性質を示している.

他に最近の進展として, 量子場の理論における (2 次元) 戸田格子などの可積分系の果たす役割, すなわち位相的・反位相的融合理論がある. この「tt*幾何学」は S. Cecotti と C. Vafa, 後に B. Dubrovin により研究が始められた. 微分幾何学の観点からは, tt*方程式の解はベクトル束の擬リーマン計量として, あるいはケーラー多様体の量子コホモロジーとして解釈できる. ケーラー多様体が複素射影空間のとき, より一般に重み付き複素射影空間のときには tt*方程式は同心円対称な 2 次元の戸田格子方程式に他ならない. 物理学の観点から, 複素射影空間の量子コホモロジーに対応するこの方程式系に対する大域的に滑らかな解の存在が予測される. しかし, 数学的には一般次元の場合にこの解の存在はまだ確かめられていない.

1 次元または 2 次元の場合, tt*方程式は同心円対称な sinh-Gordon 方程式または Tzitzeica 方程式となり, Painleve III 方程式に帰着される. Painleve 方程式のモノドロミー保存理論は大域的に滑らかな解の存在を保証する. さらに, その解は 3 次元ミンコフスキー空間内の平均曲率一定曲面として可視化することができる.

3 次元以上の場合にこれらのアプローチは適用できないため, 新しいアイデアが必要になる. tt*方程式系は 3D-XplorMath の格子パッケージの改良型を使った数値的な研究と可視化に適している. 物理学によると, 量子コホモロジーに対応する解は, 十分に時間が経過した後の解の漸近挙動などに関して非常に特殊な性質をもつと予想される. 本研究課題においてこれら的大域的に滑らかな解を数値的に探し出し, 特殊な対称性や様々な性質を探究することにより, 新しい理論的なアプローチを与えることを期待している. また, 違った方面の研究への応用として, 格子モデルに類似した方程式によって表される脳神経モデルについても上で述べた方法と同様な方針で, 実験と理論の両面から調査・研究を行った.

4. 研究成果

(1) Guest は C.-S. Lin (国立台湾大学) との共同研究で, tt*戸田格子をループ群の観点から調べた. 偏微分方程式の理論を用いて

新しい解の存在を証明した. これらの解は S. Cecotti と C. Vafa によってその存在が予想されていた (Nonlinear PDE aspects of the tt* equations of Cecotti and Vafa, arXiv:1010.1889). この研究に先立って, まず計算機を使って戸田格子方程式のこれらの解の数値シミュレーションを行った. Guest は J. Dorfmeister (TU Munchen), W. Rossman (神戸大学) との共同研究で, 微分幾何において平均曲率一定曲面に関連した tt*方程式の特別な場合について調べた. 1970 年代に McCoy-Tracy-Wu によって得られた解に対して, 微分幾何と可積分系に対するループ群の手法の観点からの解釈を与えた.

(2) Guest は 2010 年 5 月に MFI Oberwolfach において開催された研究集会 "Progress in Surface Theory" に参加し, R. Palais (UC Irvine) と共同で Pascal 版の 3D-XplorMath の開発を進めた. 3D-XplorMath の Pascal 版を最新の Mac OS にも対応できるように改良した.

また, Guest, Sinclair, 酒井は Java 版の 3D-XplorMath の格子モデルのカテゴリーの開発を進展させた. 境界条件や初期条件を設定できるなど, 様々な機能を追加した. この改良した 3D-XplorMath を用いて Fermi-Pasta-Ulam による非線形格子モデルの数値実験を再現し, 標準モードの変化を調べた. さらに, FPU 格子モデルについて戸田格子の保存量の数値実験を行った.

(3) 2010 年 12 月 13 日に首都大学東京において「Java チュートリアル: Java を使った数値計算と可視化」を開催した. チュートリアルでは常微分方程式の数値解を求め, 解曲線を描く Java アプレットを作成した. また, Sinclair は "Natural Computation" と題して, 自然界, 特に生物の進化の過程において行われる計算とコンピュータプログラミングによる計算の類似と相違について講演を行った.

(4) 東京大学の合原一幸氏の研究グループと脳神経科学における非線形振動に関して研究情報を交換し, 研究交流を行った. 2012 年 4 月に首都大学東京において, 山口陽子氏 (理化学研究所) と香取勇一氏 (東京大学) を招いてワークショップを開催するための準備を行った.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

(1) M. Guest with Chang-Shou Lin、

- "Nonlinear PDE aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa", *Crelle's Journal*, 査読有、印刷中、
<http://arxiv.org/pdf/1010.1889.pdf>
- (2) K. Hashimoto and T. Sakai、Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere, *Tohoku Mathematical Journal*, 査読有、64、2011、141-169、
http://math01.sci.osaka-cu.ac.jp/OCAMI/preprint/2010/10_19.pdf
- (3) H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki、Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, *Journal of Mathematical Society of Japan*, 査読有、2011、掲載決定、
<http://mathsoc.jp/publication/JMSJ/pdf/JMSJ6282.pdf>
- (4) M. Guest with J. Dorfmeister and W. Rossman、"The tt^* structure of the quantum cohomology of CP^1 from the viewpoint of differential geometry", *Asian J. Math*, 査読有、14、2010、417-438
<http://arxiv.org/pdf/0905.3876.pdf>
- (5) M. Guest、"Differential equations aspects of quantum cohomology", *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Press, 査読有、2010、54-85
- (6) O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki、Lie-algebraic characterization of tangentially degenerate orbits of s -representations, *Differential Geometry and Its Applications*, 査読有、2010、28、81-101
<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/geometry/wrsubmanifold/lacf.pdf>
- (7) H. Iriyeh and T. Sakai、Tight Lagrangian surfaces in $S^2 \times S^2$, *Geometriae Dedicata*, 査読有、2010、145、1-17
http://math01.sci.osaka-cu.ac.jp/OCAMI/preprint/2008/08_07.pdf
- (8) P. Georgescu, G. Dimitriu and R. Sinclair、Impulsive Control of an Integrated Pest Management Model with Dispersal between Patches, *Journal of Biological Systems*, 査読有、2010、18、535-569
<http://math.etc.tuiasi.ro/pg/papers/JBS10.pdf>

[学会発表] (計 25 件)

- (1) 酒井高司、複素二次超曲面の実形の Hamilton 体積最小性について、シンプレ

- クティック幾何と平均曲率流、2012年3月23日、KKR蔵王白銀荘
- (2) 酒井高司、Lagrangian Floer homology and its application to Hamiltonian volume minimizing property, The 4th TIMS-OCAMI Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, 2012年3月18日、国立台湾大学
- (3) M. Guest、"The tt^* -Toda equations", CIRGET Seminar, 2012年3月12日、University of Quebec at Montreal、カナダ
- (4) M. Guest、"Introduction to the article "On the classification of $N=2$ supersymmetric theories" by Cecotti and Vafa", 2012年2月24日、Koriyama Geometry and Physics Day、日本大学郡山
- (5) M. Guest、"The tt^* -Toda equations (continued)", 2012年1月27日、Workshop on Isomonodromic deformations and related topics、首都大学東京
- (6) M. Guest、"The tt^* -Toda equations (continued)", 2011年12月16日、Geometry Seminar、首都大学東京
- (7) 酒井高司、複素二次超曲面の実形の Hamilton 体積最小性について、部分多様体論・湯沢2011、2011年11月25日、湯沢グランドホテル
- (8) M. Guest、"The tt^* -Toda equations", 50 Years of Mathematics at CINVESTAV CINVESTAV, 2011年10月31日、Mexico City
- (9) 酒井高司、球面の余接束内の特殊 Lagrange 部分多様体、部分多様体幾何とリー群作用、2011年9月3日、東京理科大学森戸記念館
- (10) M. Guest、"The tt^* -Toda equations", 11th National Conference on Integrable Systems, 2011年7月27日、Wuhan Institute of Physics and Mathematics, 中国
- (11) 酒井高司、球面の余接束内の余等質性1の特殊 Lagrange 部分多様体、理工学部数学科談話会、2011年6月20日、東京理科大学
- (12) M. Guest、"The tt^* -Toda equations", Workshop on Isomonodromy Theory, 2011年6月3日、台湾国立大学、台湾
- (13) M. Guest、"Orbifold quantum cohomology, hypergeometric equations, and integrable systems", Geometry Seminar, 2011年4月28日、Academia Sinica, 台湾
- (14) 酒井高司、コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の対の Floer ホモロジー、日本数学会2011年度年会、2011年3月20日、早稲田大学
- (15) 入江博、酒井高司、田崎博之、球面の余接束内の余等質性1の特殊 Lagrange 部分多様体、日本数学会2011年度年会、2011年3月20日、早稲田大学
- (16) R. Sinclair、Natural Computation, Java チュートリアル: Java を使った数値計算と可視可、2010年12月13日、首都大学東京

- (17) R. Sinclair, Thoughts on complexity's place in evolutionary theory, OIST Winter course "Evolution of Complex Systems", 2010年12月8日、沖縄科学技術基盤整備機構
- (18) M. Guest, "From quantum cohomology to integrable systems", 2010年12月1日、Sun Yat Sen University, Guangzhou 中国
- (19) 酒井高司, 球面の余接束内の余等質性1の特殊Lagrange部分多様体、幾何学セミナー、2010年11月30日、東北大学
- (20) M. Guest, "From quantum cohomology to integrable systems", Geometry Seminar, 2010年9月24日、ETH Zurich スイス
- (21) 酒井高司, "Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere", Workshop on Hypersurfaces Geometry and Integrable Systems, 2010年8月27日、東北大学
- (22) M. Guest, "Some new solutions of the tt* equations", DMM Seminar, 2010年7月10日、IPMU, 東京大学
- (23) M. Guest, "New life for an old lattice", Conference on Geometry and Topology, Geometry Seminar, 2010年6月22日、University of Durham, 英国
- (24) M. Guest, "tt*-geometry", Progress on Surface Theory, 2010年5月10日、MFI Oberwolfach, ドイツ
- (25) R. Sinclair, What causes Flat Dendritic Bifurcations?, Global COE Seminar, 2010年4月23日

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ:

<http://tmugs.math.se.tmu.ac.jp/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

マーティン ゲスト (MARTIN GUEST)
首都大学東京・理工学研究科・教授
研究者番号: 10295470

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

ロバート シンクレア (ROBERT SINCLAIR)
沖縄科学技術大学院大学・数理生物学ユニット・教授
研究者番号: 50423744
酒井 高司 (SAKAI TAKASHI)
首都大学東京・理工学研究科・准教授
研究者番号: 30381445