

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 3月31日現在

機関番号：32612

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2012

課題番号：22654011

研究課題名（和文） ループ空間の幾何学：指数定理へむけて

研究課題名（英文） Geometry of loop spaces: towards index theorem

## 研究代表者

前田 吉昭 (MAEDA YOSHIAKI)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：40101076

## 研究成果の概要（和文）：

本研究は、ループ空間の幾何学、特に指数定理へむけた挑戦的研究を行った。この2年間では、ループ空間（無限次元多様体）にソボレフパラメータに付随したリーマン計量により、リーマン曲率の公式を具体的に擬微分作用素によって表わす公式を与えた。これをもとに、特性類の定義、さらに2次特性類（チャーン・サイモンズ不変量）の定義に成功した。また、佐々木アインシュタイン多様体についての詳細な計算を行い、その非自明性について示すことができた。

## 研究成果の概要（英文）：

The aim of this research project is to deal with the loop space from geometric point of view towards to furnish the index theory of this space. Through these 2 years, we define the Riemannian metrics with Sobolev parameter on the loop space, which is an infinite dimensional manifolds, and give an explicit formula for the curvatures in terms of pseudo-differential operators. We could give a definition of characteristic for the loop space, and also secondary characteristic class (Chern-Simons class) for this space. To show the non-triviality, we compute an example of Kahler-Sasakian manifolds explicitly.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	0	900,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	360,000	2,460,000

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：幾何学（4702）

キーワード：ループ空間、ウォジスキークリープ数 チャーンサイモンズ理論 擬微分作用素 特性類 第2特性類

## 1. 研究開始当初の背景

ループ空間の幾何学は、理論物理学、特に超弦理論での問題を明解に説明するための重要な役割を負うと期待されている。実際、素粒子論研究者が超弦理論や共形場理論の研究においてユーリスティックな理論展開のなかで、ループ空間の幾何学を提案している。それにより、発散のない量子場理論が構成できるという期待があり、現在素粒子論研究の中核となる研究として、D ブレイン、ミラー対称性等、多くの研究が進んでいる。しかしながら、この結果自身は数学としてどのように定式化しそれを肯定的に導くかが全く不明の段階であった。数学では、無限次元多様体の幾何学の問題として重要な問題と捉えている。この問題での最終的な目標は、ループ空間の不変量を計算することであり、そのために指数定理が期待されている。これらを数学的厳密性で捉えることは、今のところできていない。数学側からのアプローチは、Bismut による確率解析でのアプローチである。Bismut は、有限次元での指数定理を確率解析による手法を使って証明しなすことから、それを無限次元に応用することを試みている。しながら、Bismut のアプローチでも、まだまだ満足される解決にはいたっていない。指数定理の問題は、この問題の難しさは、すべてに無限大の発散が含まれていることにあり、発散をコントロールして、いかに幾何学的不変量を取り出すかという技術的な問題がある。これが本研究を行う背景である。一方で、物理を離れて、ループ空間の幾何学を構築することは、無限次元多様体の幾何学を進展させていく期待がある。これにより、モジュライ空間の幾何学、特に、J-正則写像のモジュライ空間の研究は、フレアホモロジーやコホモロジーの研究として、活発な研究が進められている。これらを無限次元多様体の有限次元へのリダクションとしてとらえることが考えられるが、

無限次元多様体としての取り扱い、まだおこなわれてはいない段階である。このためには、ループ空間が1次元多様体からの写像であるものを、2次元多様体からの写像の取り扱いへとステップアップする必要がある。また、さらに一般次元多様体の写像へと進展させることも重要な問題とされている。これらの研究を進めるためにも、ループ空間の幾何学の研究が期待されている。

## 2. 研究の目的

Atiyah-Wittenに示唆されたように、ループ空間の幾何学は超弦理論での問題を明解に説明するための重要な役割を負うと期待されている。しかしながら、この結果自身は数学としてどのように定式化しそれを肯定的に導くかが全く不明の段階である。本研究の目的は、この数学的定式化に挑戦し、その第一段階として指数定理を表現するループ空間の特性類を擬微分作用素の理論を駆使して構成することである。これにより、今まで知られていない新しい幾何学的不変量の導出や多様体の  $S^1$  作用に対するホモロジカル同値性についての判定への応用を目標とする。本研究は、無限次元の幾何学を単なる一般論として構築するのではなく、ループ空間という具体的な対象に対して幾何学と物理学の双方の観点から扱う。そのなかに、擬微分作用素の解析（特に多様体の上の大域理論）が必要であり、いまま代表者が構築してきた多くの結果を応用し、その有効性を示す。幾何学の問題に、トップの解析技術が応用される可能性を強くアピールできる意義も目的である。この構成によって今まで知られていない新しい不変量の導出とそれによる多くの応用が期待される。特に、ループ空間の基本群等の位相的性質の導出も目的にする。この理論のなかでは、煩雑かつ膨大なテンソル解析を行う必要がある、試行計算として

Mathematicaを利用したテンソル解析プログラムの開発目指し、微分幾何学の計算プログラムのインターネット公開を行い、微分幾何学の計算プログラムの共有ネットワークも構築していく。本研究について、ボストン大学Steven Rosenberg教授とも長年に亘り討論を重ねてきている。多くの部分は、同氏との共同研究ともなる国際共同研究である。また同氏の博士課程学生、ポストドクもこのプロジェクトへ招き、若手研究者をこのプロジェクトのなかで育成していくことも意識した研究推進を行っていく。

### 3. 研究の方法

本研究では、第一に解析的不変量の構成を厳密に行い、そののちに位相不変量についての考察を進めることである。そのために、ループ空間の特性類の構成を、研究代表者が長年かけて行ってきた多様体上の擬微分作用素の理論を駆使して構成することである。ループ空間にソボレフパラメータに付随したリーマン計量を与え、それに従ったリーマン接続とリーマン曲率の公式を具体的に擬微分作用素によって表わす公式を求める。その接続は、ループ群の場合には、D. Feedの結果と一致することをこの立場から検証する。これをもとに、0次可逆な擬微分作用素のなす無限次元リー群を標準なファイバーとする主バンドルの考察からウォジスキートレースを利用して特性類を定義する。さらに2次特性類（チャー・サイモンズ不変量）が定義される場合を調べる。奇数次元についてこの特性類の非自明性を示すために、様々な例について検証を行う。佐々木アインシュタイン計量が一つの有力な候補と考えられるので、それについて具体的な検証をする。この計算を行うために、Mathematicaによるテンソル計算ソフトの開発も行っていく。ループ空間には自然な $S^1$ 作用がある。これを勘案した幾何学の構成を行うことが最終的な目標にもなる。そのために、 $S^1$ 作用の共変性や共形変換等、不変性についての考察をおこなっていく。奇数次元の場合には、特別な性質があることが期待され、その場合について詳細な考察を行う。この議論をさらに広げて、

一般写像空間（一般次元の多様体間の写像空間）や微分同相写像全体の無限次元空間の幾何学へこの手法が有力であるかどうかの探索を始める。これらの研究を進めるために、研究協力者であるボストン大学のSteven Rosenberg氏との研究討論を定期的に行い、また、国内外の学会や研究集会にてその成果を発表し、評価を受けていく。

### 4. 研究成果

上記の研究の方法で述べたことを具体的に実行していくことで、様々な成果がえられた。第一は、擬微分作用素の解析（特に多様体の上の大域理論）が必要であり、いまままで代表者が構築してきた多くの結果を応用するために、研究代表者が長年に亘り行ってきた研究手法を有効に使える整備を行なった。それにより、ループ空間にソボレフパラメータに付随したリーマン計量を与え、それに従ったリーマン接続とリーマン曲率の公式を具体的に擬微分作用素によって表わす公式を与えた。これをもとに、0次可逆な擬微分作用素のなす無限次元リー群を標準なファイバーとする主バンドルの考察からウォジスキートレースを利用して特性類を定義した。さらに2次特性類（チャー・サイモンズ不変量）が定義される場合を調べることができた。特性類の非自明性を示すために、 $S^{2n+1} \times S^{2n+1}$ の上にある佐々木アインシュタイン構造を用いて、そのループ空間の曲率、チャー類、2次特性類の具体的な計算を行うことで、ループ空間での2次特性類の自明性を示すことができた。ループ空間でのチャー・クラスおよび2次特性類についての構成法の提案がほぼ完成しつつある。さらに、この研究の意義を明確にするために、一般の写像空間（一般次元の多様体間の写像空間）や微分同相写像全体の無限次元空間の幾何学へこの手法が有力であるかどうかの探索を始めるループ空間以外の無限次元多様体での幾何学的対象でのチャー・クラスの構成を行ってみることに、その応用、さらにはディラック作用素の構成、共変理論の構成等を進めていくことへと研究が進展している。これらの研究を進めるために、研究協力者

であるボストン大学の Steven Rosenberg 氏との研究討論を定期的に行い、その成果は現在論文としてまとめている。本研究では、ループ空間での計量、チャーンクラスの設定および非自明性についての検証は、具体的な例での計算であり、かなり煩雑かつ膨大な計算が必要であることも分かり、そのために、テンソル解析の計算プログラムを実装して、Mathematica 等の計算ソフトへ搭載できる試行も行った。これらのソフトも関連する研究者へ提供している。現在までの成果について、様々な専門家との討議を行って評価も得てきた。今までの成果を再度考察しなおし、これらをまとめていく段階にはいることが出来ている。さらに、ループ空間以外の無限次元多様体での幾何学的対象でのチャーンクラスの構成を行ってみることを戦略的に進展させるために、J-正則写像のモジュライ空間の研究を進めている。これは今までの研究手法が応用できる見通しは立ってきたが、計算等さらに複雑になる。この困難さを乗り越える方法を現在模索しているが、いくつかのアイデアを試行している。本研究の最終目的となる指数定理の構築のために、無限次元ディラック作用素の構成も進めている。また共変性のある理論の構成等を進めている。また、ループ空間の量子化問題についても進展が進んできた。特に、変形量子化によるアプローチが有効であることが分かってきた。この研究方向も進展させている。さらには、本研究はボストン大学 Steven Rosenberg 教授との共同研究として、さらに発展できることが明確になった。この研究が国際共同研究として、意義ある研究になる見通しもできた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

1. Yoshiaki Maeda, Akifumi Sako;  
Deformation quantization of instantons on  $R^4$ . Analysis, Geometry and quantum fieldtheory, Contemp. Math., 584(2012), 39

-63. 査読有

2. Yoshiaki Maeda, Akifumi Sako;  
Noncommutative deformation of spinor zero mode and Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin construction. J. Math. Phys. 53 (2012) 022303-022327. 査読有

[学会発表] (計 1 件)

Y. Maeda, Deformation Quantization and Spectral analysis Analysis, Geometry and Quantum Field Theory (招待講演), 2011年9月30日, University of Postdom, Germany

[図書] (計 1 件)

前田吉昭, 佐古彰史; 幾何学の量子化, サイエンス社, 2013. 176 ページ

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

前田 吉昭 (MAEDA YOSHIAKI)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号: 40101076

### (2) 研究分担者

亀谷 幸生 (KAMETANI YUKIO)  
慶應義塾大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 70253581

### (3) 連携研究者

該当者なし