

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 31 日現在

機関番号：24506

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2011

課題番号：22654019

研究課題名（和文）準楕円性と磁場付きシュレジンガー作用素

研究課題名（英文）Hypoellipticity and Schroedinger operators with magnetic fields

研究代表者

保城 寿彦（TOSHIHIKO HOSHIRO）

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：40211544

研究成果の概要（和文）：本研究では準楕円性と磁場付きシュレジンガー作用素の固有値問題を研究した。非準楕円性や非解析的準楕円性と磁場付きシュレジンガー作用素の固有値問題との関係についての成果があった。また研究集会を開催して準楕円性と関連する諸分野の研究交流を行った。

研究成果の概要（英文）：In this research, we studied hypoellipticity and the eigenvalue problems of Schroedinger operator with magnetic fields. We obtained some results on the relation between the both fields. We also organized some international conferences and supported academic exchanges between researchers related to hypoellipticity.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,300,000	0	1,300,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	2,100,000	240,000	2,340,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：偏微分方程式、準楕円性、数理物理、スペクトル理論

## 1. 研究開始当初の背景

代表者は準楕円性の研究者としてそのキャリアを始めた。大学院のころは Sj $\ddot{o}$ strand, Grijs, Helffer らの仕事を学んだが、当時彼らは準楕円性の研究から、その技術が役に立つ準古典解析の分野に研究テーマを変えていた。代表者が準楕円性の研究で結果を出せたのは今から 25 年ほど前、森本芳則先生が楠岡-Stroock の無限次退化楕円型作用素の準楕円性をマリアヴァン解析でやられた仕事を超局所解析で始められたのを契機とする。代表者は準楕円性についての仕事をいくつかやった後、研究対

象を分散型方程式の平滑化作用に移したが、2002年に Rutgers の Costin が、代表者が書いた最後の（非解析的）準楕円性に関する論文（京大ジャーナル 1995 年掲載）の結果を改良した論文 S のプレプリントを送ってきた。当時すでに興味移っていて、またその論文は自分ではあまり満足できない結果であったこともあり、その後その論文が代表者の書いたものの中でもインパクトファクターの高い論文であることを知っても、元の分野に戻とうとは思わなかった。今回この考えを覆し、本研究を開始しようと思った契機は、2009年9月パリ 13 大学で行われた Helffer の還暦を記念する研究

集会で、講演者の1人の Rutgers の Chanillo 氏と懇談した際、彼は代表者の名を知っていて Helffer や Laptev らと非解析的準楕円性に関する論文 (Journal of Funct. Anal. 2004年掲載) を書いているということを知ったことにある。つまり元の分野でやり残した仕事をやろうというのが本研究の主旨であった。

## 2. 研究の目的

本研究では無限次に退化した楕円型作用素の準楕円性と磁場付きシュレジンガー作用素のスペクトルの性質を研究する。特にこれら2つの話題の関連を考察することによって新しい結果を導くのが目的であった。具体的にはベクトル場の2乗の和で表される無限次退化楕円型作用素の準楕円性とユークリッド空間の領域で定義された磁場付きシュレジンガー作用素の境界値問題の固有値あるいはスペクトルの下限等の性質の新しい結果を出すことを主な目標であった。

## 3. 研究の方法

基本的には本研究では研究代表者が研究目的を達成するために必要な知識を得ることによって研究を進めた。また研究集会で本課題と関連のある国内外の研究者を招聘して研究交流をおこなった。具体的には龍谷大学と山口大学が共同で主催する研究集会“松山キャンプ”にて国内外の研究者を招聘して研究交流を行った(2010年度)。また代表者の所属する兵庫県立大学の数理科学教室と立命館大学が共同で行っている偏微分方程式姫路研究集会でも海外からの研究者を招聘した(2011年度)。

## 4. 研究成果

(1) まず退化した楕円型作用素の非準楕円性と非線形固有値問題の関係を研究した。非線形固有値問題は非自己共役固有値問題の1つであり、スペクトル理論の中で最近最も盛んに研究されているレゾナンスや、波動方程式のダンピング項と解の減衰とも関連する重要なテーマの一つである。一方非準楕円性の証明には滑らかでない解を構成すればよいのだが、これはなかなか難しいことである。そこで本研究では一つの変数に関して部分フーリエ変換してパラメータの付いた固有値問題を考えた。つまり滑らかでない解は、もしそれが存在するとすれば、固有値問題の固有関数になり、その固有関数のパラメータについての挙動をみると元の関数が滑らかでない解であることがわかるのである。目標の非準楕円性の証明にはその非線形固有値問題の固有値の存在と固有値と固有関数がパラメータに

どのように依存するかを調べればよいことがわかった。

(2) 次に上述の非線形固有値問題の固有値の存在の証明の技術的側面を研究した。それは大きく3つの方法に分かれている。まず代表者が書いた最後の(非解析的)準楕円性に関する論文では M.Christ の手法を利用した。この方法では常微分方程式から解の微分不等式を導き、そこからパラメータが複素平面のいくつかの半直線上を動くときのロンスキアンの上と下からの漸近評価より最終的には関数論のPhragmen-Lindelöfの原理にもっていき、それによってロンスキアンが零点を持つこと示す。しかし Costin の手法はこれをさらに精密にやるによるものである。かれはもとの方程式を変換して、ベッセルの微分方程式で近似して、ベッセル関数の古典的で精密な情報により、代表者ができなかった残された場合でも非解析的準楕円性の証明に成功した。

一方、Chanillo氏がHelffer や Laptev らとの共同研究で用いた方法はこれらとは全く異なる方法であった。その方法とは固有値問題を積分作用素の固有値問題に変換してそのトレースをみることによる。この方法は一般性が高く、上述の常微分方程式に基礎をおくやり方と違って多次元の一般的な作用素の場合の結果を導くことができる。しかしこの方法も欠点があり、必ずしもベストの結果が得られず強すぎる仮定からしか結論がでなかったりすることがわかった。

最後の方法は D.Robert らによる手法で、上述のトレースをみることに準古典解析の手法を付加したもので、トレースがプランク乗数がゼロに近づくときの漸近展開の最初の項を求めることによりトレースがゼロでないことを示すのである。

本研究では上述の3つ方法で2つめの方法の3つめでないやり方、つまり準古典解析的ではない不等式を探求した。

(3) 磁場付きシュレジンガー作用素のスペクトルの性質では、上述の非線形固有値問題が最小固有値の固有関数が平面領域の境界で曲率が最も高いところに集中することと滑らかでない解と関連があることがわかった。そのことを進めれば Ginzburg-Landau 汎関数と関連して超伝導現象の理解が深まることと思われる。

2010年度の“松山キャンプ”では近年準楕円性の手法が有効であることがわかってきた Boltzman 方程式の研究者も招聘され、代表者や連携研究者はこれらの人々との研究交流ができた。このことは代表者の大いな

る幸いと思える出来事であった。関係した方々全員に感謝の意を表します。これにより両分野に新たな展開があればと思っている。

2011年度4月に代表者の家庭の状況が一変して代表者が研究活動に多くの時間をさくことが不可能になった。そのため研究期間内に代表者は査読付きの論文での発表という形で研究を完成できなかった。この期間中に研究したことはなんらかの形で発表しようと思っている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① W. Bauer, K. Furutani, C. Iwasaki, Spectral zeta function of the sub-Laplacian on two step nilmanifolds, J. Math. Pures Appl. 査読有  
Vol. 97(2012), 242-261. DOI Information: 10.1016/j.matpur.2011.06.003
- ② Y. Saito, T. Umeda, A sequence of zero modes of Weyl-Dirac operators and an associated sequence of solvable polynomials, Operator Theory: Advances and Applications 査読有  
vol. 219 (2012), 197 - 209.
- ③ A. Balinsky, W. D. Evans, T. Umeda, The Dirac-Hardy and Dirac-Sobolev inequalities in  $\mathbb{R}^n$ , Publ. RIMS, Kyoto Univ. 査読有 vol. 47 (2011), 791 - 801.
- ④ T. Hoshiro, Non linear eigenvalue problems and related topics, 26<sup>th</sup> Matsuyama Camp :Recent Development on Partial Differential Equations, 査読無 (2011)106 -111
- ⑤ Y. Saito, T. Umeda, Eigenfunctions at the threshold energies of magnetic Dirac operators, Reviews Math. Phys. 査読有  
vol 23 (2011), No. 2, 155 - 178

[学会発表] (計6件)

- ① C. Iwasaki, A representation of the fundamental solution and eigenfunction

expansion to the Fokker-Planck operator, Workshop Geometric and Singular Analysis, 2012/03/16,

University of Potsdam(Germany)

- ② C. Iwasaki, Symbols of the fundamental solution and spectral zeta function of nilmanifolds, 2012/02/24

偏微分方程式姫路研究集会

イーグレ姫路 (姫路市)

- ③ C. Iwasaki, Spectral zeta function of the sub-Laplacian on nilmanifolds, 2011 NCTS Taiwan-Japan Joint Workshop on PDEs and SGeometric Analysis  
2011/12/21, NCTS(新中、台湾)

- ④ C. Iwasaki, A representation of the fundamental solution to the Fokker-Planck operator, Fu-Jen Form on Analysis  
2011/12/16 Fu-Jen 大学 (台北, 台湾)

- ⑤ C. Iwasaki, A representation of the fundamental solution to the Fokker-Planck operator, 2011/09/29  
数学教室コロキウム  
University of Gottingen (Germany)

- ⑥ T. Hoshiro, Non linear eigenvalue problems and related topics, 26<sup>th</sup> Matsuyama Camp: Recent Development on Partial Differential Equations,  
2011/01/08,  
龍谷大学ともゆき荘 (京都市中京区)

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：

国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://web.cc.yamaguchi-u.ac.jp/~hirosawa/other/matsuyamacamp2011/lecturenotes.htm>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

保城 寿彦 (HOSHIRO TOSHIHIKO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：40211544

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

岩崎 千里 (IWASAKI CHISATO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：30028261

榎田 登美男 (UMEDA TOMIO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：20160319