様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　６月　４日現在

機関番号：12601
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2010～2011
課題番号：22654021
研究課題名（和文）条件Ｃと性質（Ｔ）―大域変分法とユニタリ表現論の背後にあるものを求めて
研究課題名（英文） The condition C and the property (T) ― Looking for what is behind global variational methods and unitary representation theory

研究代表者
金井　雅彦　(KANAI MASAHIKO)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：70183035

研究成果の概要（和文）：葉層化多様体の上の非線形接ポアンカレ不等式の獲得を目指し，研究を行った．部分的な結果は得られたものの，まだ発表できる段階ではない．一方，応用として群作用の剛性についても研究を行った．これについては，恐らく新たな結果が得られたのではないかと思う．現在最終的な検証を行っているところである．

研究成果の概要（英文）：A partial result on nonlinear tangential Poincare inequalities on foliated manifolds has been obtained, but further investigation should be done before publishing it. Also, it seems that a new perspecive on the rigidity of group actions was gained. Hopefully it would be published soon.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	1,400,000	0	1,400,000
２０１１年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,600,000	360,000	2,960,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：条件 C・性質(T)

１．研究開始当初の背景

1960 年代，ふたつの概念が誕生した．ひとつは Palais--Smale により提出された条件 C，もうひとつは Kazhdan により発見された性質 (T)である．前者は大域変分法を，後者はユニタリ表現論をその生誕の地とする．それから四十余年，条件 C ，性質 (T) ともにおのおのの分野，さらにはその周辺分野においてその重要性を十二分に認識されるに至った．しかし，その成長の過程において，これらふたつの概念は互いに他と交わることなく，全く独立した道を歩んできたように見える．ところが，これらふたつの概念には実は極めて強い類似性が観察される．ただし，申請者以外に条件 C と性質(T)の類似性に気づいた研究者を，申請者は知らない．

２．研究の目的

条件Ｃと性質 (T)，これらふたつの概念には極めて強い類似性が観察される．実は，いずれもコンパクト性の発言ととらえることが可能である．その類似性の背後に分野を横断する大きなメカニズムが存在することが予感される．大域変分法とユニタリ表現論の背

後にある未知の領域を探索し，条件Ｃと性質(T)の共通の源泉を発見をすることが，本研究の目的であった．

３．研究の方法

性質（T）の背後に見え隠れする「コンパクト性」の源を暴き，その発見を新たな武器に申請者が長年取り組んでいる群作用に対する剛性問題のさらなる発展を目指す --- これが本研究計画のより具体的な目標であった．そして，その実現のために我々が採用する基本戦略は，以下の通りのものであった --- 条件Ｃにあって性質（T）にないものを明らかにし，それらを性質（T）の背後に求める，あるいは，大域変分法においては既知であるが，ユニタリ表現論には未知であるものを探し求める．

４．研究成果

以下の３項目に関し，研究を実施した．第１の項目に関しては，部分的な結果は得られたものの，発表できる水準に達するまでにはさらなる考察が必要な段階である．第２の項目に関しては，残念ながら実質的な成果は得られなかった．しかし，その問題設定自体が間違っていたとは考えていない．今後もこの問題に対し考察を重ねていくつもりである．第３の項目に関しては，おそらく新たな知見が得られたのではないかと思われる．現在得られたプログラムの細部を検討中である．

（１）葉層化多様体に対する非線形接ポアンカレの不等式．幾何学においても数多くの変分問題が登場する．山辺の問題，調和写像，ヤング・ミルズ接続などがその著名な例である．そして，その大半は非線形的な問題である．しかるに一方，Kazhdan の性質（T）はユニタリ表現論をその住処とする．したがって，それはアプリオリに線形的でなければならない．性質（T）の「非線形化」が望まれる理由がここにある．

例えば，(通常の）ポアンカレ不等式の「非線形版」として，写像に対するポアンカレ不等式なるものが考えられる（関数に代わって写像を取り扱うことにより，問題はたちどころに非線形化される）．その「葉層化多様体版」の開発を目指す．２０世紀を代表する幾何学者 Gromov により「葉層化調和写像」なる概念が提出され，その剛性問題への応用が論じられている．しかし，彼は「葉層化調和写像」の厳密な意味での存在を証明したわけではない．その存在証明には非常に大きな困難が伴うため，ある種の「虚像」(「弱解」の類）の存在をその代わりに示した．もし非線形ポアンカレ不等式の「葉層化多様体版」が証明できれば，葉層化調和写像の厳密な意味での存在が証明できると期待されている．

非線形ポアンカレ不等式の「葉層化多様体版」の開発を目指すにあたっては，性質(T) を有することが知られている対象，すなわち，実階数が２以上の非コンパクト半単純リー群やその格子，あるいはある種のランダム群などに対し，それらが性質（T）を有することを，表現論に訴えることなく証明することをまず第一に目指すべきであると考える（この時点ではまだ問題は線形的である)．かつて Zimmer が行ったように，各葉が実階数が２以上の非コンパクト型局所リーマン対称空間であるといった「簡単な」葉層構造に関しては上述のプログラムを（一部非線形的なものまで含め）実現することができたが，より非自明な葉層構造に関しては，いまだにそれを実現することができていない．

ところで，どの種の葉層構造に関し非線形的性質（T）を有することを示したいと望んでいるかを，少し説明しておきたい．例として実ユニモデュラー群 G = SL(3,R) を例に取ろう．その部分群としてすべての対角成分が正であるような対角行列全体のなす部分群 A を考える（A は可換群 R^2 と同型である)．一方，Γを G の一様格子とする．このとき，商Γ¥G の上への A の右からの作用（これは Weyl チャンバー流と呼ばれる）は局所自由であり，したがってその軌道はΓ¥G の葉層構造を定める．実ユニモデュラー群やそれに付随して現れるリーマン対称空間 SL(3,R)/SO(3) の「骨格」とも見なされる葉層構造である．あるいは，対称空間 SL(3,R)/SO(3) は点からできていると考えるよりも，A と同型な全測地的かつ平坦な２次元部分空間たちから作り上げられていると考えようといったわけである．この種の葉層構造は，すべての非コンパクト半単純リー群，およびそれに付随したリーマン対称空間に対し考えることができる（ただし，ひとつの群あるいは空間に対し取り得る葉層構造は複数ある)．この種の葉層構造に対し，性質（T）およびその非線形的一般化を確立したいと願っているのだが，残念ながら現時点ではそれに成功していない．ただし，極めて魅力的なもくろみであるので，今後も試行を続けていく所存である．

（２）臨界指数・摂動法．　幾何学に登場する変分問題の大半は，条件Ｃを満たしていない．山辺の問題，(定義域が２次元の場合の）調和写像や，４次元ヤング・ミルズ接続など，それらいずれにおいても臨界指数がその非線形項に現れる．ソボレフのコンパクト埋入定理が少なくとも直接には使えない状況である．一見欠落したように見えるコンパクト性を回復するために利用されたのが，摂動法

であり，最良定数の方法であった．これらの変分問題は，「条件 C の世界」そのものには属さないが，その「閉包」には属していると言うことが出来ようか．「条件 C の世界」の拡張に貢献した臨界指数，摂動法，最良定数，といった現象・手法の対応物を，性質 (T) が活躍する場にも求める．

（３）群作用の剛性．かつて研究代表者が行った研究のひとつに，ある種の群作用の剛性に関するそれがある．それを思い起こすことから話を始めよう．いま，実ユニモデュラー群 G = SL(n+1,R) の n-次元球面への標準的な，したがって(実)射影的な作用を考える．それを G の一様格子Γに制限したものを A^0 と記すことにしよう．このとき，Katok-Spatzier によれば，n が２以上という仮定の下（この仮定は本当に必要な仮定である），その作用は以下の意味で局所剛性的である：Γの n 次元球面への滑らかな作用であって，適当な位相に関し標準的な作用 A^0 に十分近いものは，A^0 と共役である．すなわち，A^0 の十分小さな摂動は，群作用を本質的に変えるものではない．力学系理論における位相共役の概念は，「位相的な範疇」においては力学系に対する十分小さな摂動が力学系を変え得ないこととして定式化されたのに対し，これは「微分可能的な範疇」において同様のことを主張する．すなわち，局所剛性は位相的安定性のより強い（実際には極めて強い）ヴァージンであると考えられる．Katok-Spatzier は 純粋に力学系理論的な考察により，ときに KAM 理論に相当するような極めて高度な技術を駆使しつつ，この定理を証明した．１９９０年代中頃のことである．一方，同時期に研究代表者は，次元 n が非常に大きいという過剰な仮定のもとでではあるが，同じ結果を全く異なる着想に基づき独立に証明している．研究代表者のとった方法は，幾何学的であり，調和積分論的であった．そして，証明の過程においては，まず群作用からある仕方で葉層構造を構成し，次いでそれが条件Cに類するものを満たすこと，あるいは性質 (T) に類するものを有することを発見している．研究代表者によるこの古い仕事の中に，本研究計画を実行するにあたっての重要な手がかりがあると感じ，この古い仕事に対し再度検討を加えた．その結果，いくつかの重要かつ新たなな発見を得ることができた．

研究代表者のかつての仕事の中でなされた重要な発見のひとつは，研究代表者が「Thomas の手法」と呼んだものである（２０世紀前半に Thomas によって成された研究の中にその着想は見出されるが，代表者自身により大きなアレンジが加えられている)．それにより，本来射影幾何学的であった問題が，アフィン幾何の問題に還元される．とくに，上述の群作用 A^0 の局所剛性を示すにあたっては，ある線形的なコホモロジーの消滅を示せば十分であることが保証される．そして，そこに現れるあるコホモロジー類（それが自明であることを示したい）を代表するコサイクルが，実はシュワルツ微分の高次元化に相当するものであることを，本研究課題の研究期間中に認識した．実１次元において射影構造とシュワルツ微分が密接な関係を持つことは，極めて古くから知られている．高次元においても，射影幾何と関わる仕方でシュワルツ微分の高次元化が導入できることが，何人もの幾何学者により指摘されている．代表者自身も知らずのうちに高次元シュワルツ微分を再発見していたわけである．代表者によるかつての仕事の中にシュワルツ微分が登場していたという認識は，しかしこの古い仕事をさらに再検討する大きな原動力となった．それが，n=1 の場合の Ghys の仕事を想起させるからである．

第２の発見は，新しい空間の構成である．以前の仕事においては，群Γの球面への作用に対し，サスペンション(すなわち，Borel の構成）を行うことにより葉層化多様体を構成した．この空間の上にはあまりよい力学系が定義されていない．そこで，以前の仕事においては，その葉層構造の葉に沿ったブラウン運動を考え，その経路上の積分をとることにより，所定のコホモロジーの消滅を証明した．一種調和積分論的な発想である．しかし，消滅を保証するために必要なある作用素の正定値性の証明は，非常に技術的な困難を含み，それが次元に関し過剰な仮定をせねばならなかった理由でもある．平成２３年度に得た新たな着想のひとつは以下のようなものである．格子Γの球面への作用を，球面上のあるファイバー束に持ち上げる（ここでふたたび Thomas の手法が鍵を握る)．そして，その持ち上げられた群作用に対しサスペンション構成を適用して得られる新たな葉層化多様体を考える．以前のものと比して，この新たな空間はより高い「対称性」を有する．とくに，その上には Weyl チャンバー流やその摂動に相当するような，剛性の強い力学系が定義されている．そこで，旧来のブラウン運動に代えて，かつて この力学系の軌道に沿っての積分を行うことにより，問題のコホモロジーの消滅を示すことが出来そうである．力学系の軌道に沿っての積分を行うことにより，与えられたコサイクルのコホモロジー類が自明であることを示すことは，前出の Ghys の仕事を始めとし，力学系理論においては標準的な手法と考えられる．Katok-Spatzier や研究代表者がかつて多くの労力を払い確立した局所剛性定理を，より身近なものにする画期的な成果であると密

かに自負して鋳る.

残念ながら，研究期間中にこの新たな発見を論文の形にまとめ上げることはできなかった. しかし，近日中には投稿論文として発表することができる見込みである.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計５件）

1) 金井雅彦「複比を巡って」,研究集会「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」,ともいき荘(京都市), 2011 年 12 月 10 日.

2) 金井雅彦「複比を巡って」,談話会,東京大学, 2011 年 11 月 4 日.

3) 金井雅彦“Cross ratio, its relatives and rigidity”, Today Forum, “Geometry and Dynamics”, October 17, 2011, ENS Lyon.

4) 金井雅彦 「群作用の剛性 - 不変幾何構造を介して」, 慶応幾何セミナー,慶應義塾 大学,2011 年 6 月 20 日.

5) 金井雅彦“Rigidity of group actions via invariant geometric structures”, リー群・表 現論セミナーおよびトポロジー火曜セミナー(合同開催),東京大学,2011 年 6 月 7 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

金井　雅彦　(KANAI MASAHIKO)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：70183035

(2)研究分担者

(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　)

研究者番号：